CM 12
Réseaux et Flots

Cours Optimisation Discrète 19 mai 2011

Friedrich Eisenbrand
EPFL

Réseaux et flots

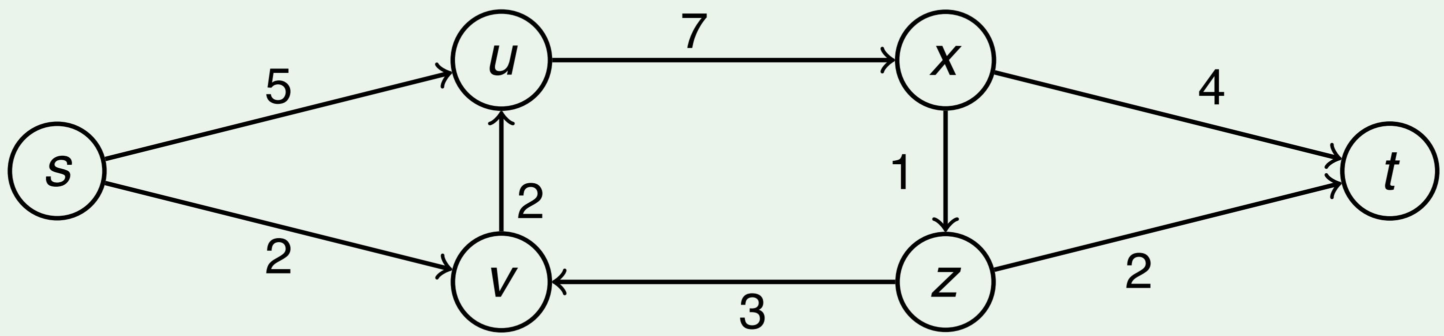
Définition (Réseau, flot de s à t)

représenté par graphe orienté simple $D = (V, A)$ et fonction de capacité $u : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Une fonction $f : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ est appelée flot de s à t, si

$$\sum_{e \in \delta^{out}(v)} f(e) = \sum_{e \in \delta^{in}(v)} f(e), \quad \text{pour tout } v \in V - \{s, t\}, \tag{48}$$

où $s, t \in V$. Le flot est admissible, si $f(e) \leq u(e)$ pour tout $e \in A$.

Exemple : Réseau et flot de s à t



Réseaux et flots

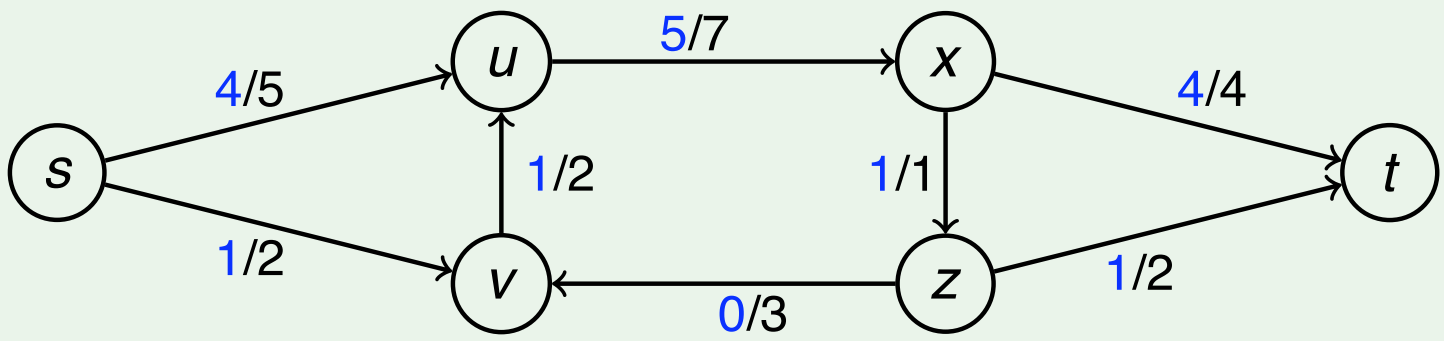
Définition (Réseau, flot de s à t)

représenté par graphe orienté simple $D = (V, A)$ et fonction de capacité $u : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Une fonction $f : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ est appelée flot de s à t, si

$$\sum_{e \in \delta^{out}(v)} f(e) = \sum_{e \in \delta^{in}(v)} f(e), \quad \text{pour tout } v \in V - \{s, t\}, \tag{48}$$

où $s, t \in V$. Le flot est admissible, si $f(e) \leq u(e)$ pour tout $e \in A$.

Exemple : Réseau et flot de s à t

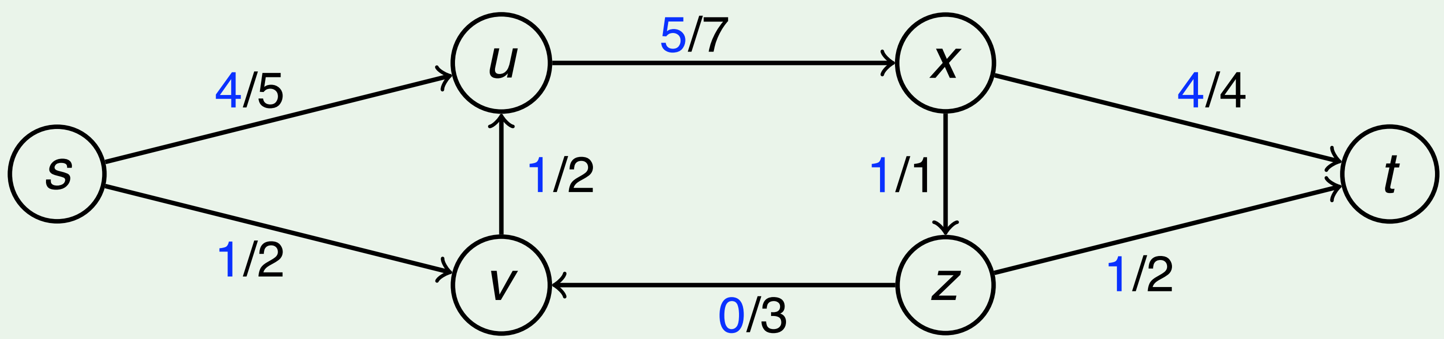


Valeur du flot

Définition (Valeur)

La valeur de f est définie comme $value(f) = \sum_{e \in \delta^{out}(s)} f(e) - \sum_{e \in \delta^{in}(s)} f(e)$. Le problème du flot maximal de s à t consiste à déterminer un flot valeur maximal de s à t qui est admissible.

Exemple : Réseau et flot de s à t



Coupes

Définition (Coupe)

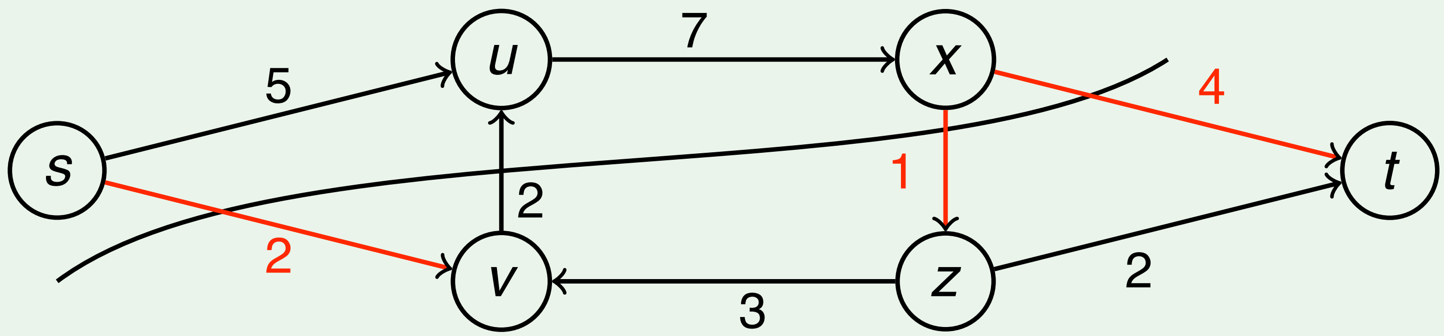
Pour $U \subseteq V$, $\delta^{in}(U)$ dénote les arcs qui entrent dans U et $\delta^{out}(U)$ dénote les arcs sortant de U. Des ensembles d'arcs de la forme $\delta^{out}(U)$ sont appelés une coupe de D. La capacité d'une coupe $u(\delta^{out}(U))$ est la somme des capacités de ses arcs.

Coupes

Définition (Coupe)

Pour $U \subseteq V$, $\delta^{in}(U)$ dénote les arcs qui entrent dans U et $\delta^{out}(U)$ dénote les arcs sortant de U. Des ensembles d'arcs de la forme $\delta^{out}(U)$ sont appelés une coupe de D. La capacité d'une coupe $u(\delta^{out}(U))$ est la somme des capacités de ses arcs.

Exemple : Réseau et flot de s à t



Un PL pour les flots maximaux

$$
\begin{aligned}
\max \sum_{e \in \delta^{out}(s)} x(e) \quad & - \quad \sum_{e \in \delta^{in}(s)} x(e) \\
\sum_{e \in \delta^{out}(v)} x(e) \quad & = \quad \sum_{e \in \delta^{in}(v)} x(e), \ \text{pour tout } v \in V - \{s, t\} \\
x(e) \quad & \leq \quad u(e), \ \text{pour tout } e \in A \\
x(e) \quad & \geq \quad 0, \ \text{pour tout } e \in A
\end{aligned}
$$

Remarque

Si le PL est borné et les capacités sont des nombres entiers, le PL a une solution optimale intégrale, lorsque la matrice d'incidence sommets-arcs d'un graphe orienté est totalement unimodulaire.

Fonction d'excès

Définition (Fonction d'excès)

Pour tout $f : A \to \mathbb{R}$, la fonction d'excès ; $exces_f : 2^V \to \mathbb{R}$ est définie par $exces_f(U) = \sum_{e \in \delta^{in}(U)} f(e) - \sum_{e \in \delta^{out}(U)} f(e)$.

Théorème

Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté, soit $f : A \to \mathbb{R}$ et soit $U \subseteq V$, alors

$$exces_f(U) = \sum_{v \in U} exces_f(v). \tag{49}$$

Dualité faible et graphe résiduel

Théorème (Dualité faible)

Soit f un flot admissible de s à t et soit $\delta^{out}(U)$ une coupe de $s-t$, alors value$(f) \leq u(\delta^{out}(U))$.

Définition (Graphe résiduel)

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ et $u : A \to \mathbb{R}$ où $0 \leq f \leq u$. Considérons l'ensemble d'arcs

$$A_f = \{a \mid a \in A,\ f(a) < u(a)\} \cup \{a^{-1} \mid a \in A,\ f(a) > 0\}. \tag{50}$$

Le graphe orienté $D(f) = (V, A_f)$ est appelé graphe résiduel de f (pour des capacités u).

Corollaire

Soit f un flot admissible de s à t et supposons qu'il n'y a pas de chemin de s à t dans $D(f)$, alors f est de valeur maximale.

Marches non-orientées

Définition (Marche non-orientée)

Une marche non-orientée est une séquence de la forme $P = (v_0, a_1, v_1, \ldots, v_{m-1}, a_m, v_m)$, où $a_i \in A$ pour $i = 1, \ldots, m$ et $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ ou $a_i = (v_i, v_{i-1})$. Si les sommets $v_0, \ldots, v_m$ sont tous différents, alors P est un chemin non-orienté.

Tout chemin orienté P dans $D(f)$ induit un chemin non-orienté dans D. Définissons pour un tel chemin P le vecteur $\chi^P \in \{0, \pm 1\}^A$ comme

$$\chi^P(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } P \text{ traverse } a, \\ -1 & \text{si } P \text{ traverse } a^{-1}, \\ 0 & \text{si } P \text{ ne traverse ni } a \text{ ni } a^{-1}. \end{cases} \tag{51}$$

L’algorithme de Ford et Fulkerson

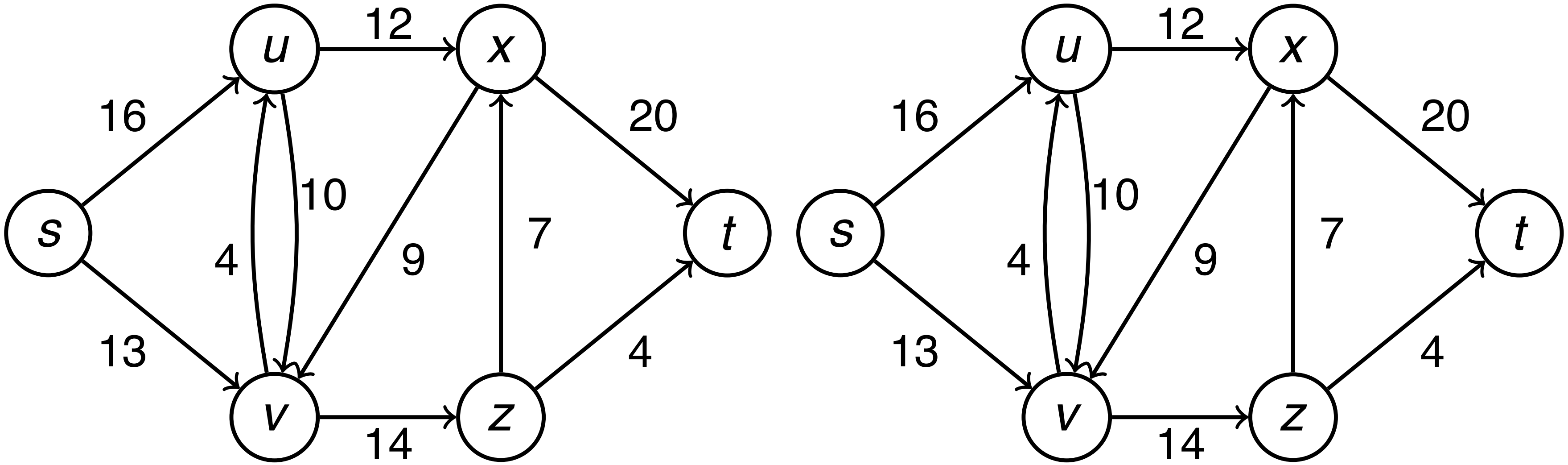
L’algorithme de Ford et Fulkerson

Commencer avec $f = 0$. Puis appliquer itérativement l’algorithme d’augmentation de flot suivant :
Soit P un chemin orienté de s à t dans $D(f)$. Soit $f \leftarrow f + \epsilon\chi^P$, où ϵ est aussi grand que possible tout en gardant $0 \leq f \leq u$.

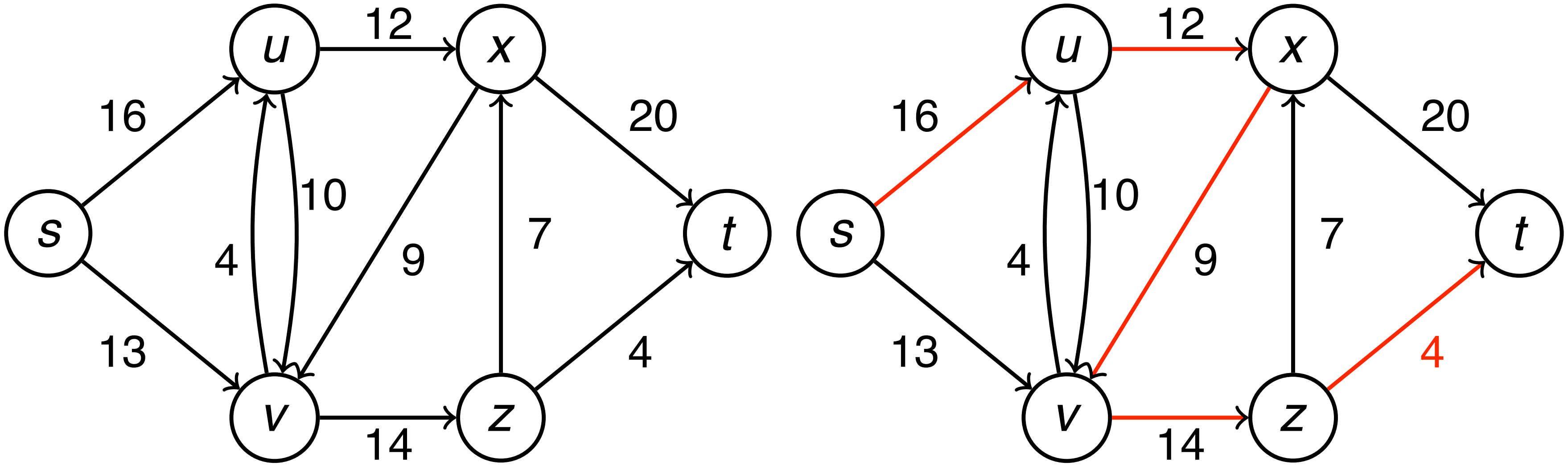
Exercice

Définissez une capacité résiduelle pour $D(f)$. Déterminez ensuite la valeur maximale de ϵ telle que $0 \leq f \leq u$.

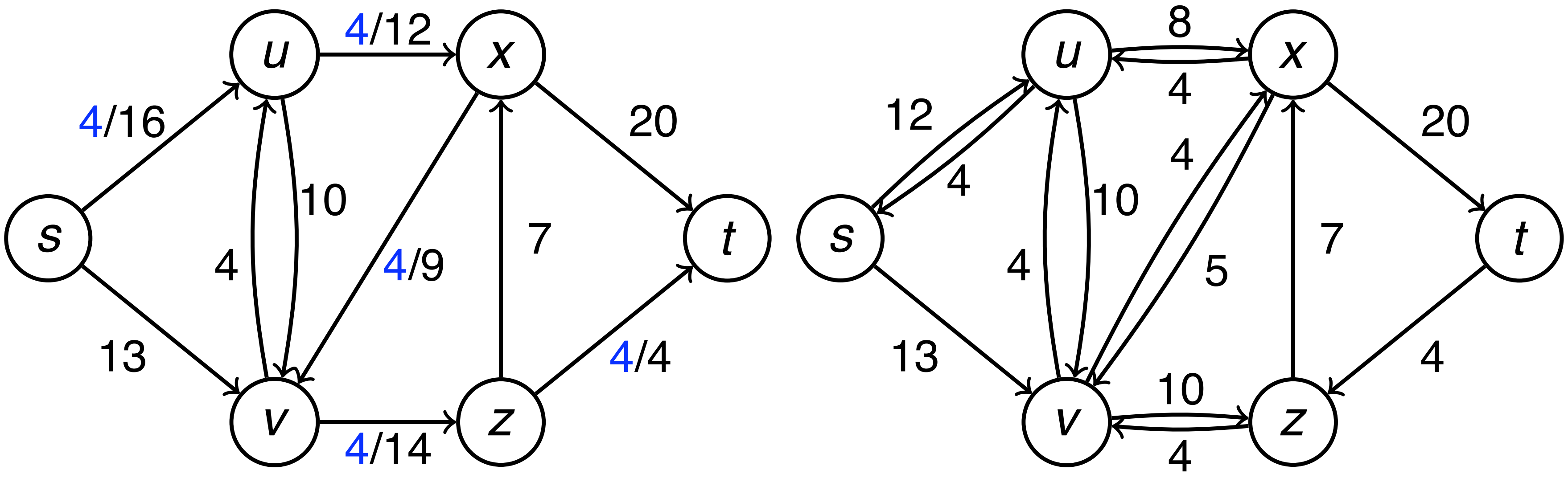
Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple



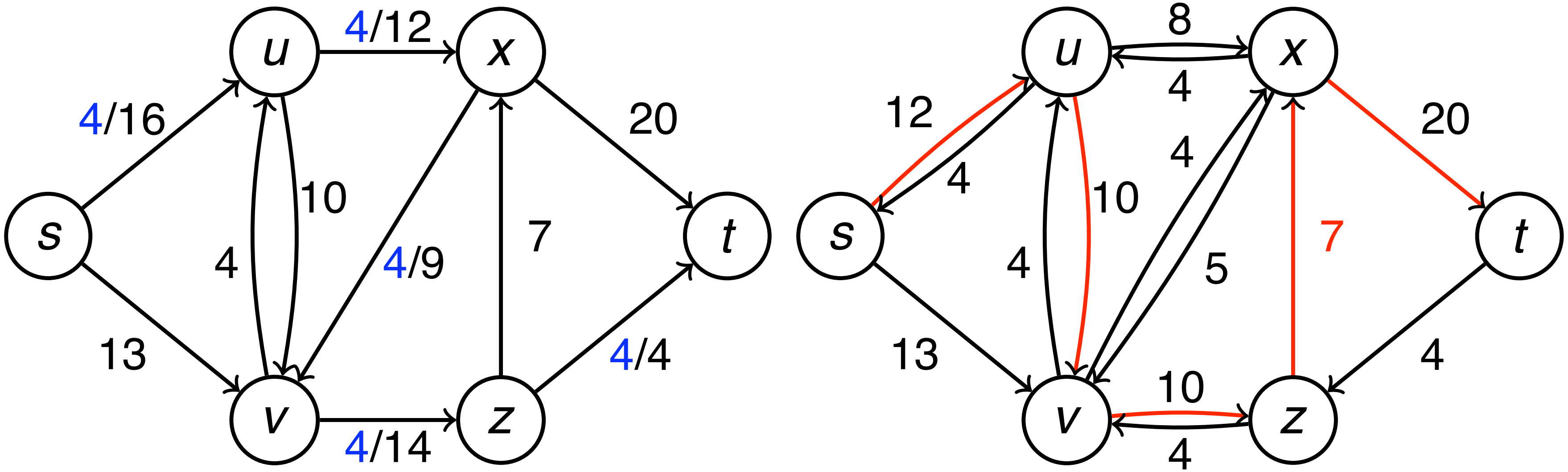
Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple



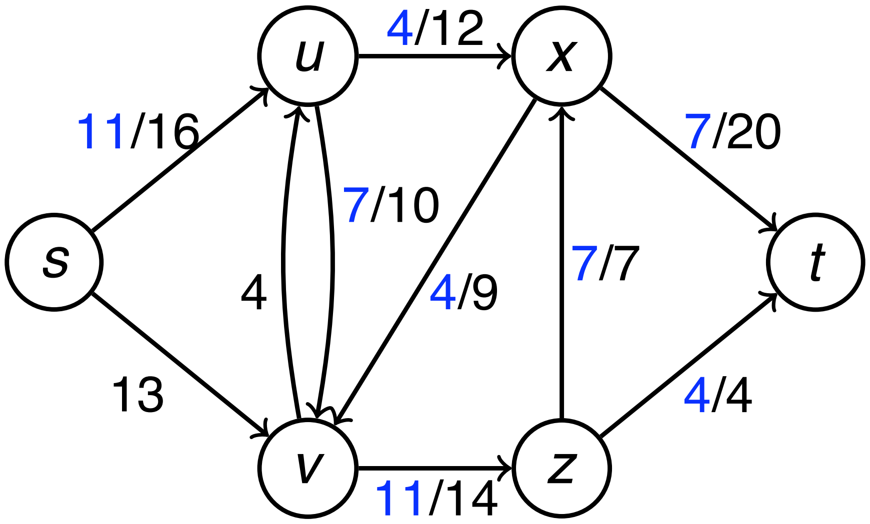
Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple

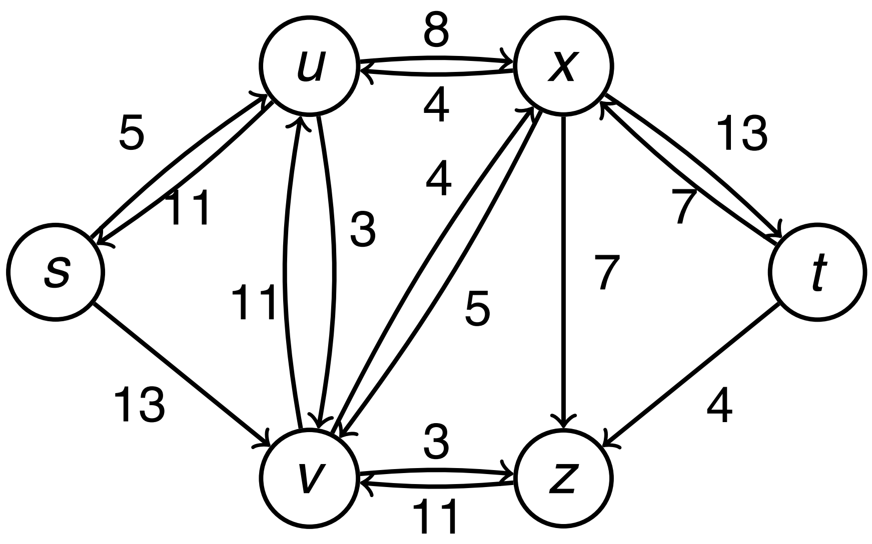


Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple

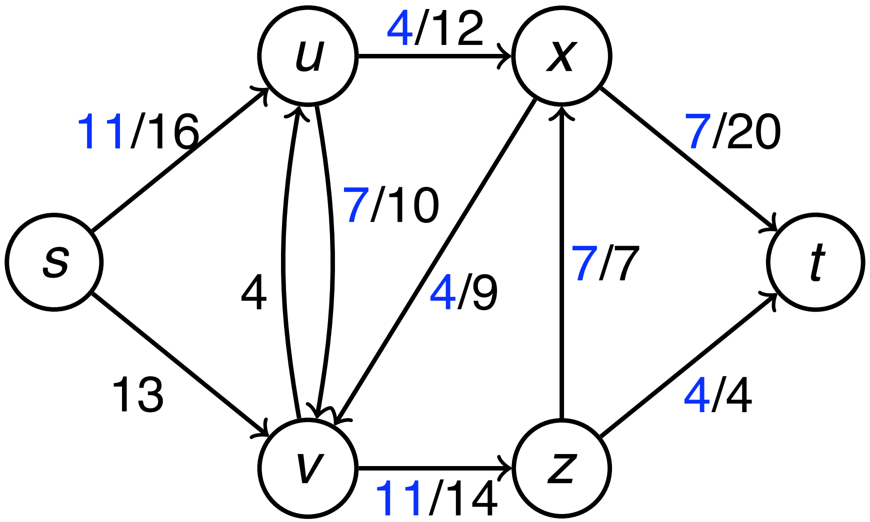


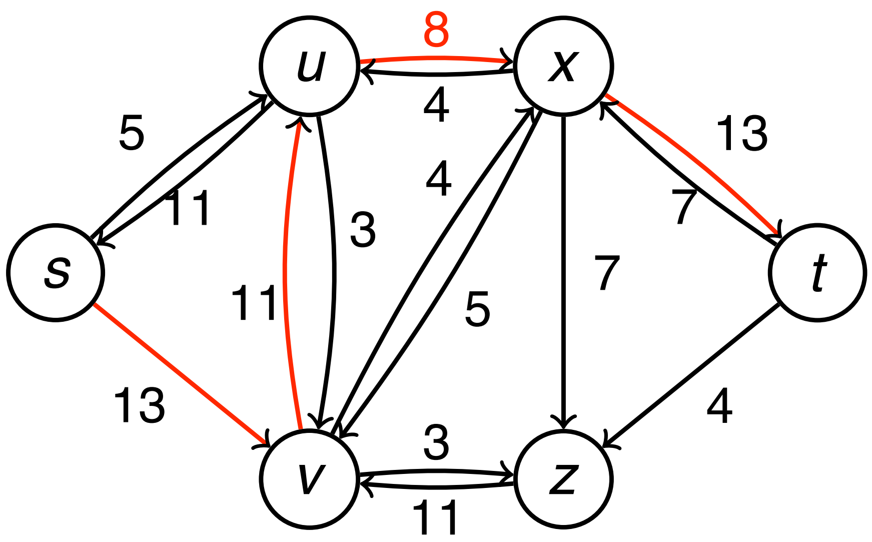
Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple



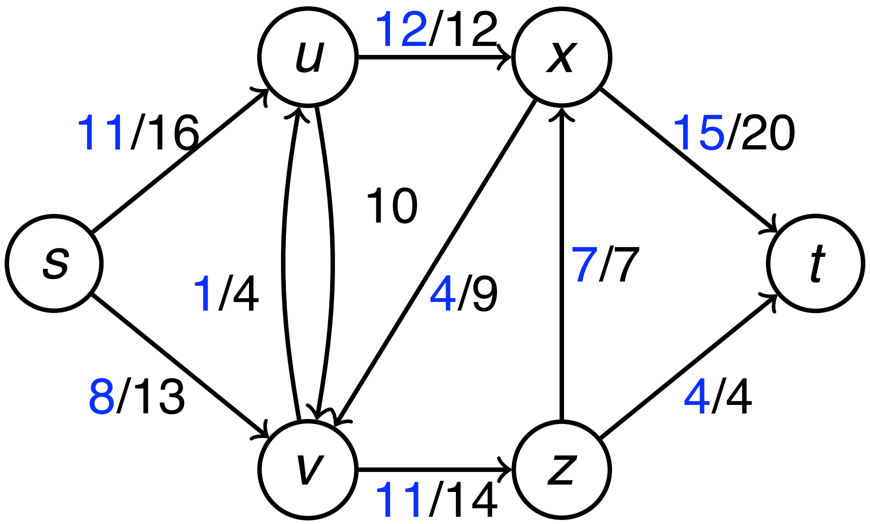


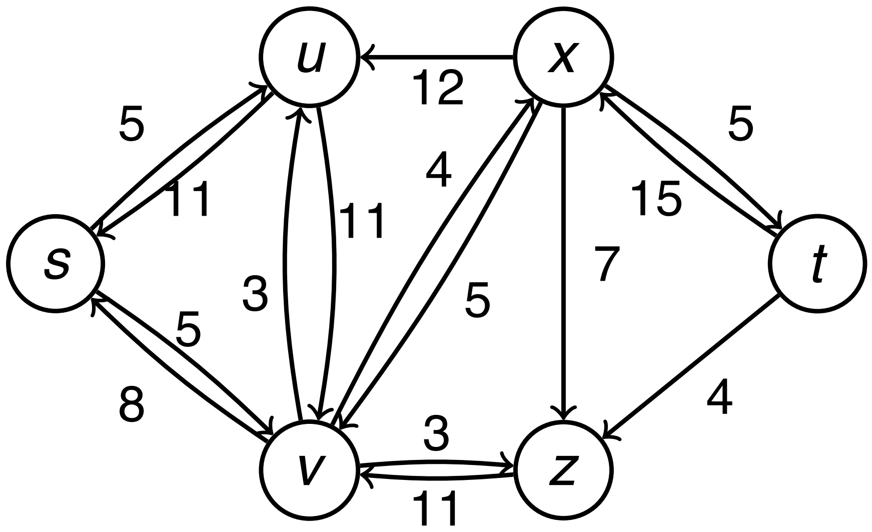
Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple



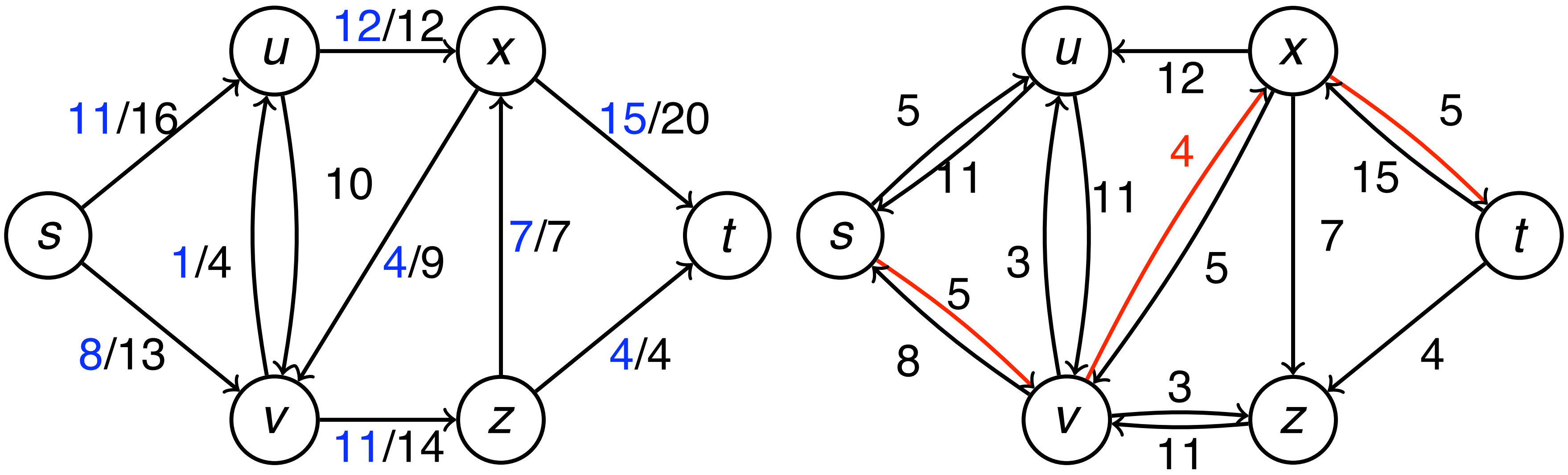


Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple

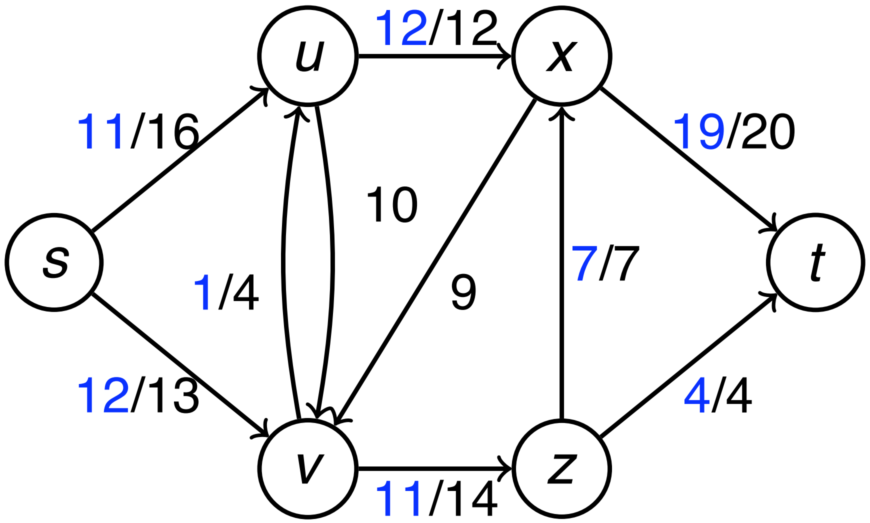


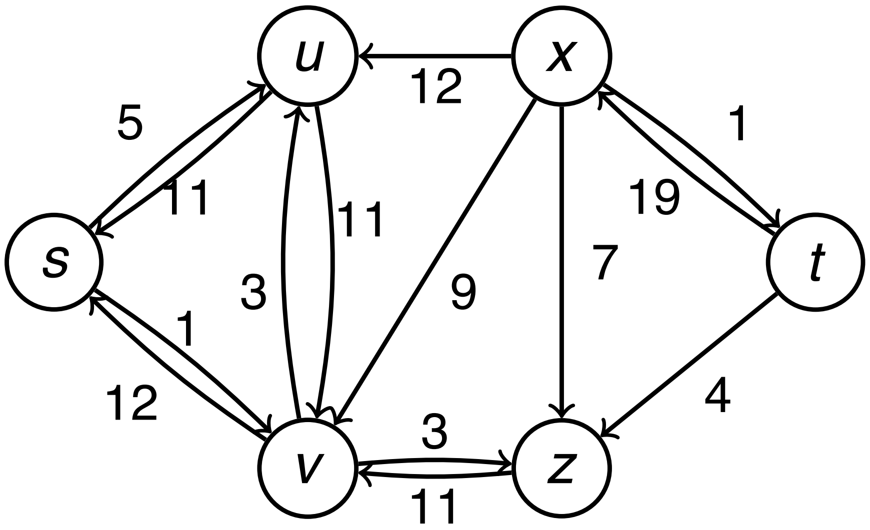


Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple



Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple





Dualité forte

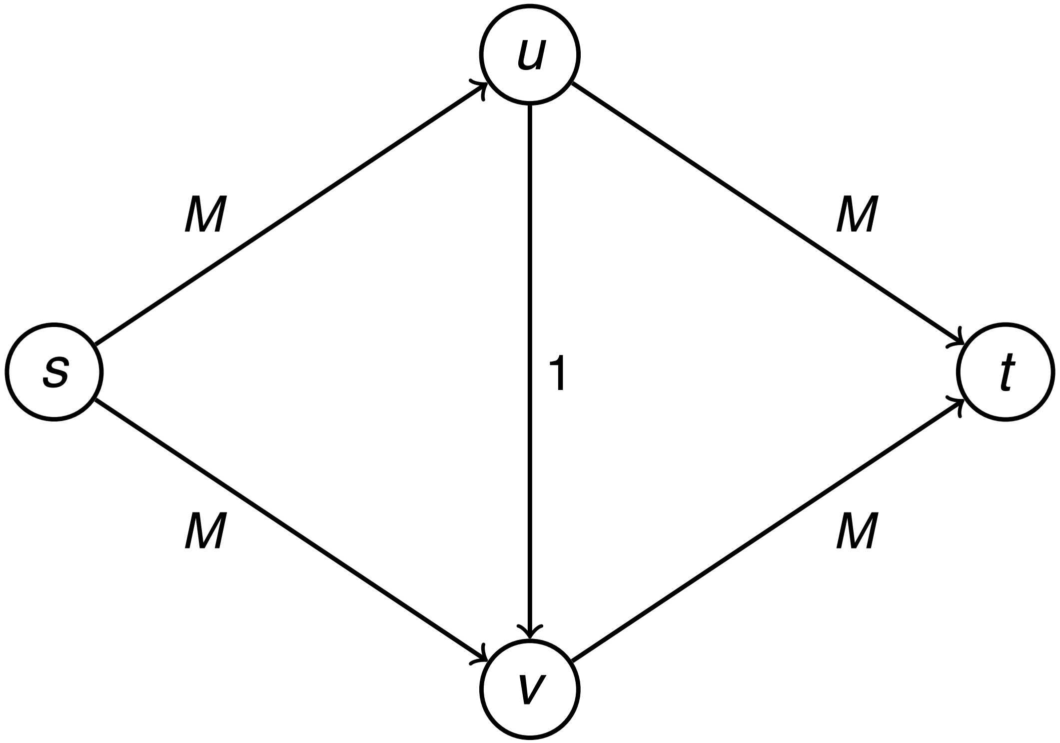
Théorème (Théorème du flot max et de la coupe min, dualité forte)

La valeur maximale d'un flot admissible de s à t est égale à la capacité d'une coupe minimale de $s - t$.

Corollaire (Théorème d'intégralité)

Si $u(a) \in \mathbb{N}$ pour tout $a \in A$, alors il existe un flot maximal entier ($f(a) \in \mathbb{N}$ pour tout $a \in A$).

L'algorithme de Ford-Fulkerson s'exécute-t-il en temps polynômial ?



Lemme

Définition

Soient $D = (V, A)$ un graphe orienté, $s, t \in V$ et $\mu(D)$ la longueur d'un plus court chemin de s à t. Soit $\alpha(D)$ l'ensemble d'arcs contenu dans au moins un des plus courts chemins de s à t.

Lemme

Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté et $s, t \in V$. Définissons $D' = (V, A \cup \alpha(D)^{-1})$. Alors $\mu(D) = \mu(D')$ et $\alpha(D) = \alpha(D')$.

Algorithme en temps polynômial

Théorème

Si à chaque itération nous choisissons un plus court chemin de s à t dans $D(f)$ comme chemin d'augmentation de flot, le nombre d'itérations est au plus $|V| \cdot |A|$.

Corollaire

Un flot maximal peut être déterminé en temps $\mathrm{O}(n\, m^2)$.