

Algorithme du simplexe

CM 4

La Méthode Du Simplexe (2)

Marcher sur les toits encore

Cours *Optimisation Discrète* 17 mars 2011

Brouillon d'algorithme

- i) Calcule le sommet x_B^* du toit B
- ii) Trouve un index $i \in \{1, \dots, m\} \setminus B$ tel que $a_i x_B^* > b_i$. Si un tel index n'existe pas, x_B^* est la solution optimale.
- iii) Détermine index $j \in B$ tel que
 - a) $B' = B \cup \{i\} \setminus \{j\}$ est un toit
 - b) Sommet $x_{B'}^*$ de B' est admissible pour le PL défini par B .
Si un tel index n'existe pas, le PL (6) est inadmissible.

Friedrich Eisenbrand
EPFL

66

67

Notes

Notes

Terminaison et dégénération

Définition (Toit et PL dégénéré)

Un toit B du PL (6) est *dégénéré* si la solution optimale du PL (7) n'est pas unique. Un PL est dégénéré si le PL a un toit dégénéré.

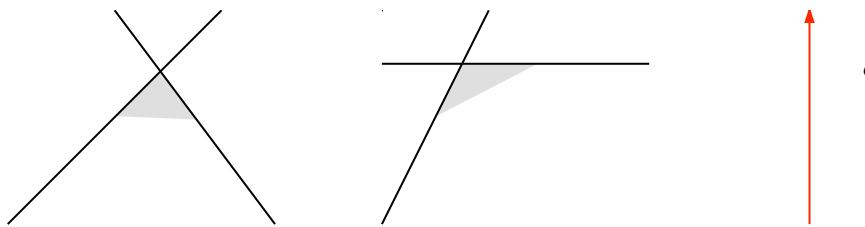


FIGURE: Toit non-dégénéré et toit dégénéré

Le cas non-dégénéré

Théorème

L'algorithme du simplexe termine si le PL (6) est non-dégénéré.

Notes

68

Notes

69

Implementer pas iii)

Trouver un index qui sort le toit

- On considère les systèmes d'équations

$$\sum_{k \in B} a_k z_k = c^T \quad (21)$$

$$\sum_{k \in B} a_k y_k = -a_i \quad (22)$$

avec variables $z_k, y_k, k \in B$.

- Calcule la solution $z^* \in \mathbb{R}^n$ de (21) et la solution $y^* \in \mathbb{R}^n$ de (22)
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k \in B} a_k (z_k^* + \lambda \cdot y_k^*) + a_i \cdot \lambda = c^T \quad (23)$$

- On cherche $\lambda \geq 0$ maximal, tel que (23) est encore une combinaison conique de c .

Implementer pas iii) cont.

- Calcule $J = \{k \in B : y_k^* < 0\}$

$$\lambda^* = \min_{k \in J} -\frac{z_k^*}{y_k^*}. \quad (24)$$

On choisit $j \in J$ tel que le minimum est atteint.

- j sort du toit
- Si $J = \emptyset$, on constate que le PL n'est pas admissible.

Notes

Notes

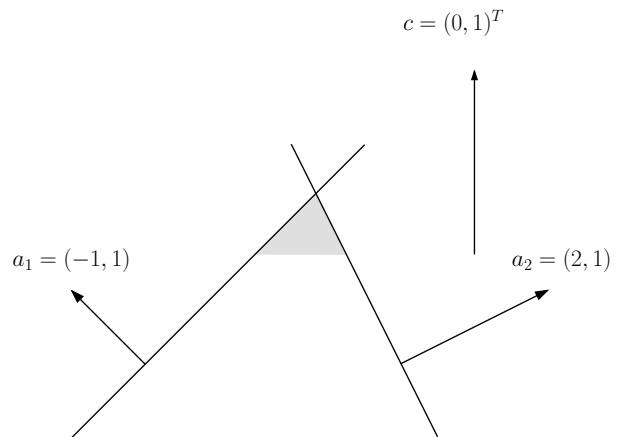


FIGURE: Le toit initial d'exemple suivant.

Exemple

On considère

$$\max \left\{ x_2 : x \in \mathbb{R}^n, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Le toit initial est $B = \{1, 2\}$

x_B^* est la solution de

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (25)$$

alors $x_B^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La contrainte $(1, 2)x \leq 1$ coupe $x_B^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors 3 va entrer dans le toit B' .

On considère

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (26)$$

et on trouve

$$z^* = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$

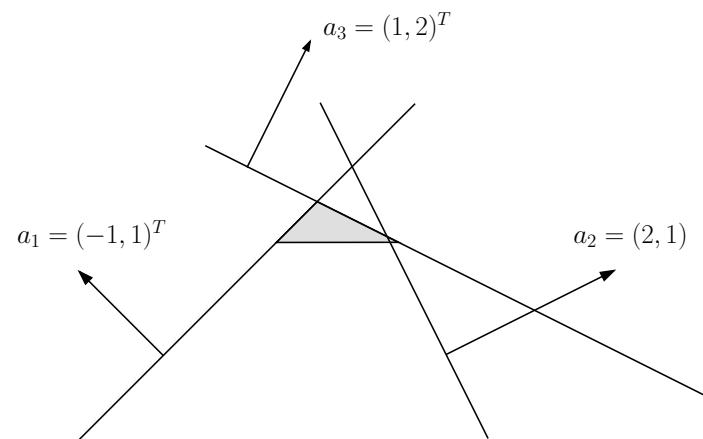
On considère

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (27)$$

et on trouve

$$y^* = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$J = \{1, 2\}$ et le minimum dans (24) est atteint par $j = 2$. Alors
 $B' = \{1, 3\}$.



Plus grand exemple

Exemple en 3 variables

Nous allons résoudre le PL $\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^3, Ax \leq b\}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Questions

Questions principales

Est-ce que cette manière d'implémenter pas iii) est correcte ? En autres mots, est-ce que

- ▶ $B' = B \cup \{i\} \setminus \{j\}$ est un toit ?
- ▶ le sommet de B' est admissible pour le PL défini par B ?
- ▶ Si $J = \emptyset$, est-ce que le PL n'est pas admissible ?

Notes

Notes

Affirmer l'inadmissibilité

Lemme

L'ensemble des indexes $B' = B \cup \{i\} \setminus \{j\}$ est un toit et $x_{B'}^*$ est admissible pour le PL défini par B .

Si $J = \emptyset$, le PL est inadmissible.

Proposition

Les demi-espaces $a_k^T x \leq b(k)$, $k \in B$ et $a_i^T x \leq b(i)$ définissent un système d'inégalités inadmissible si et seulement si $J = \emptyset$.