CM 4

La Méthode Du Simplexe (2)

Marcher sur les toits encore

Cours *Optimisation Discrète* 17 mars 2011

Friedrich Eisenbrand
EPFL

Algorithme du simplexe

Brouillon d'algorithme

i) Calcule le sommet x_B^* du toit B

ii) Trouve un index $i \in \{1, \ldots, m\} \setminus B$ tel que $a_i\, x_B^* > b_i$. Si un tel index n'existe pas, x_B^* est la solution optimale.

iii) Détermine index $j \in B$ tel que

   a) $B' = B \cup \{i\} \setminus \{j\}$ est un toit

   b) Sommet $x_{B'}^*$ de B' est admissible pour le PL défini par B.

   Si un tel index n'existe pas, le PL (6) est inadmissible.

Terminaison et dégénération

Définition (Toit et PL dégéneré)

Un toit B du PL (6) est *dégéneré* si la solution optimale du PL (7) n'est pas unique. Un PL est dégéneré si le PL a un toit dégéneré.

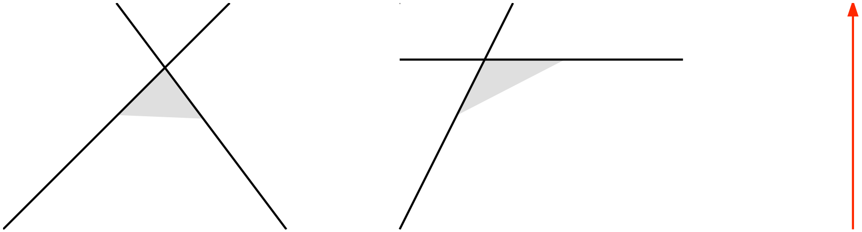


FIGURE: Toit non-dégéneré et toit dégeneré

Le cas non-dégéneré

Théorème

L'algorithme du simplexe termine si le PL (6) *est non-dégéneré.*

Implementer pas iii)

Trouver un index qui sort le toit

- On considère les systemes d'équations

$$\begin{aligned} \Sigma_{k\in B} a_k z_k &= c^T && (21)\\ \Sigma_{k\in B} a_k y_k &= -a_i && (22)\end{aligned}$$

  avec variables z_k, y_k $k \in B$.
- Calcule la solution $z^* \in \mathbb{R}^n$ de (21) et la solution $y^* \in \mathbb{R}^n$ de (22)
- Pour $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{k\in B} a_k(z_k^* + \lambda \cdot y_k^*) + a_i \cdot \lambda = c^T \tag{23}$$

- On cherche $\lambda \geq 0$ maximal, tel que (23) est encore une combinaison conique de c.

Implementer pas iii) cont.

- Calcule $J = \{k \in B \colon y_k^* < 0\}$

$$\lambda^* = \min_{k \in J} -\frac{z_k^*}{y_k^*}. \tag{24}$$

  On choisit $j \in J$ tel que le minimum est atteint.
- j sort du toit
- Si $J = \emptyset$, on constate que le PL n'est pas admissible.

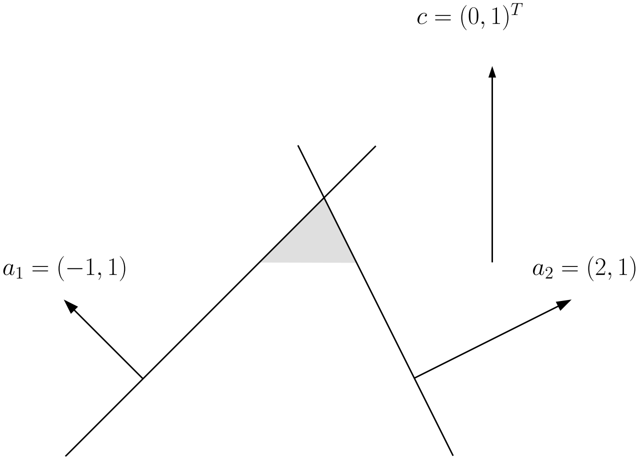


FIGURE: Le toit initial d'exemple suivant.

Exemple

On considère

$$\max\left\{x_2 \colon x \in \mathbb{R}^n,\ \begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Le toit initial est $B = \{1,2\}$
x_B^* est la solution de

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix} x = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \tag{25}$$

alors $x_B^* = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$.
La contrainte $(1,2)x \leq 1$ coupe $x_B^* = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$. Alors 3 va entrer dans le toit B'.
On considère

$$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} z = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{26}$$

et on trouve

$$z^* = \left(\begin{smallmatrix}2/3\\1/3\end{smallmatrix}\right).$$

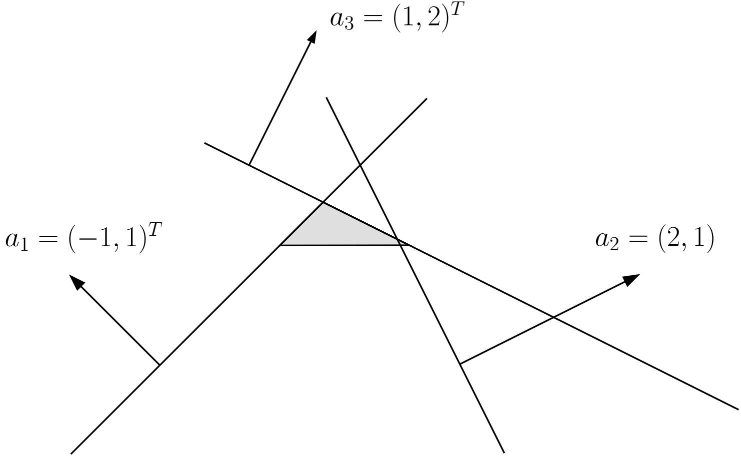
On considère

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} y = -\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{27}$$

et on trouve

$$y^* = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right).$$

$J = \{1, 2\}$ et le minimum dans (24) est atteint par $j = 2$. Alors $B' = \{1, 3\}$.



$a_3 = (1, 2)^T$
$a_1 = (-1, 1)^T$
$a_2 = (2, 1)$

Plus grand exemple

Exemple en 3 variables

Nous allons résoudre le PL $\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^3, Ax \le b\}$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Questions

Questions principales

Est-ce que cette manière d'implémenter pas iii) est correcte ? En autres mots, est-ce que

- $B' = B \cup \{i\} \setminus \{j\}$ est un toit ?
- le sommet de B' est admissible pour le PL défini par B ?
- Si $J = \emptyset$, est-ce que le PL n'est pas admissible ?

Lemme

L'ensemble des indexes $B' = B \cup \{i\} \setminus \{j\}$ est un toit et $x^*_{B'}$ est admissible pour le PL defini par B.

Affirmer l'inadmissibilité

Si $J = \emptyset$, le PL est inadmissible.

Proposition

Les demi-espaces $a_k^T x \leq b(k),\ k \in B$ et $a_i^T x \leq b(i)$ définissent un système d'inégalités inadmissible si et seulement si $J = \emptyset$.