CM 8

Programmation linéaire en nombres entiers

Cours *Optimisation Discrète* 14 avril 2011

Friedrich Eisenbrand
EPFL

Notes

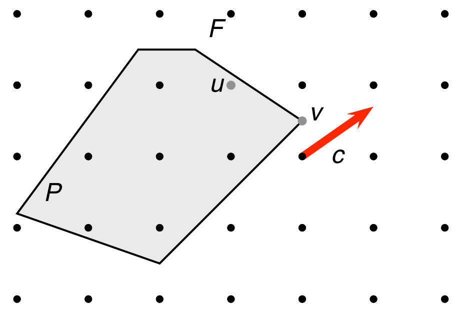
Programmation linéaire en nombres entiers

PLNE

Un programme linéaire en nombres entiers est un problème de la forme suivante

$$\begin{aligned} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \in \mathbb{Z}^n, \end{aligned} \tag{41}$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$



Notes

Relaxation

Définition (Relaxation linéaire)

Le PL

$$\begin{aligned} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{42}$$

est la relaxation linéaire du PLNE (41).

Lemme

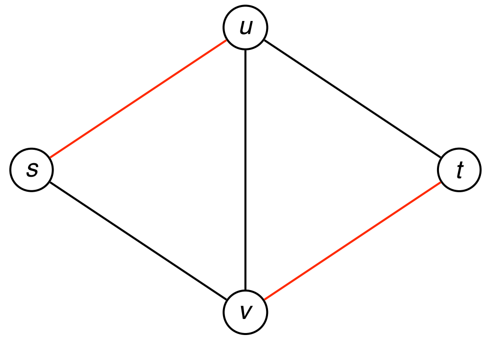
Si x^* est une solution optimale de la relaxation linéaire et si on a de plus $x^* \in \mathbb{Z}^n$, alors x^* est une solution optimale du PLNE.

Notes

Graphes et couplages

Définition

Un graphe est un couple $G = (V, E)$ où V est un ensemble fini (les sommets ou nœuds) et $E \subseteq \binom{V}{2}$ est l'ensemble des arêtes. Un couplage de G est un ensemble $M \subseteq E$ tel que pour $e_1, e_2 \in M$ avec $e_1 \neq e_2$ on a $e_1 \cap e_2 = \emptyset$.



Notes

Arêtes adjacentes

Définition (Arêtes adjacentes (ou incidentes) à un sommet)

Pour un sommet $v \in V$, l'ensemble $\delta(v) = \{e \in E\colon\ v \in e\}$ représente l'ensemble des arêtes adjacentes (ou incidentes) au sommet v.

Utilisant cette définition, le probléme du couplage à poid maximum peut s'écrire comme suit sous forme d'un PLNE.

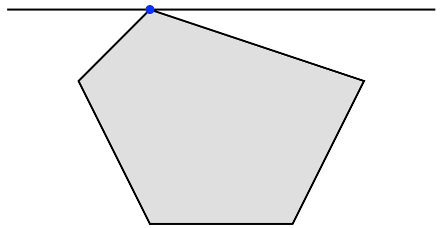
$$\begin{array}{r} \max \sum_{e \in E} w(e)x(e) \\ v \in V:\ \sum_{e \in \delta(v)} x(e) \leq 1 \\ e \in E:\ x(e) \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^{|E|}. \end{array} \tag{43}$$

Notes

Faces et sommets

Définition (Inégalité valide, face, sommet)

Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ Ax \leq b\}$ un polyèdre. Une inégalité $c^T x \leq \beta$ est appelé valide pour P si $c^T x^* \leq \beta$ pour tout $x^* \in P$. Une face de P est un ensemble de la forme $P \cap \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ c^T x = \beta\}$ pour une inégalité valide $c^T x \leq \beta$ de P. Si une face consiste d'un seul point, alors on dit qu'elle est un sommet de P.



Notes

Polyèdre intégral et l'algorithme du simplexe

Définition

Un polyèdre rationnel est appelé intégral si chaque face non-vide de P contient un vecteur intègral.

Lemme

Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n \colon Ax \leq b\}$ un polyèdre intégral où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice de rang-colonne plein. Si le programme linéaire

$$\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^n, \, Ax \leq b\} \tag{44}$$

est admissible et borné, alors la méthode du simplexe rend une solution optimale intégrale du programme linéaire (44).

Notes

Matrices totalement unimodulaires

Lemme

Soit $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ une matrice intégrale est inversible. Alors $A^{-1} b \in \mathbb{Z}^n$ pour tout $b \in \mathbb{Z}^n$ si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.

Définition

Une matrice intégrale $A \in \{0, \pm 1\}^{m \times n}$ est appelé totalement unimodulaire si tout sous-matrice carré de A a un déterminant $0, \pm 1$.

Théorème (Hoffman-Kruskal Theorem)

Soit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ une matrice intégrale. Alors le polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, \; x \geq 0\}$ est intégrale pour tout $b \in \mathbb{Z}^m$ si et seulement si A est totalement unimodulaire.

Notes

Graphes bipartis

Définition

Un graphe $G = (V, E)$ est biparti, si l'ensemble des sommets V peut être partitionné en deux ensembles A et B tel que chaque arête $\{u, v\} \in E$ a une éxtremité en A et l'autre dans B.

Définition

La matrice d'incidence sommets-arêtes d'un graphe $G = (V, E)$ est la matrice $A \in \{0, 1\}^{|V| \times |E|}$ défini par

$$A(v, e) = \begin{cases} 1, & \text{if } v \in e, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Lemme

Si G est un graphe biparti, alors la matrice d'incidence qui correspond à G est totalement unimodulaire.

Notes

Dualité : Couvertures

Définition

Une couverture de sommets d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $C \subseteq V$ des sommets tel que $e \cap C \neq \emptyset$ pour tout $e \in E$.

$$\begin{aligned} \min \textstyle\sum_{v \in V} w(v)x(v) \\ uv \in E : x(u) + x(v) \geq 1 \\ v \in V : x(v) \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^V. \end{aligned} \tag{45}$$

Clairement, ce PLNE peut se réécrire comme suit.

$$\min\{w^T x \colon A^T x \geq 1,\ x \geq 0,\ x \in \mathbb{Z}^V\}, \tag{46}$$

où A est la matrice d'incidence sommets-arêtes de G.

Notes

Théorème de König

Théorème (König's theorem)

Pour tout graphe biparti, le nombres d'arêtes dans un couplage maximum est égal au nombre de sommets dans une couverture de sommets minimum.

Notes