

CM 8

Programmation linéaire en nombres entiers

Cours *Optimisation Discrète* 14 avril 2011

Friedrich Eisenbrand
EPFL

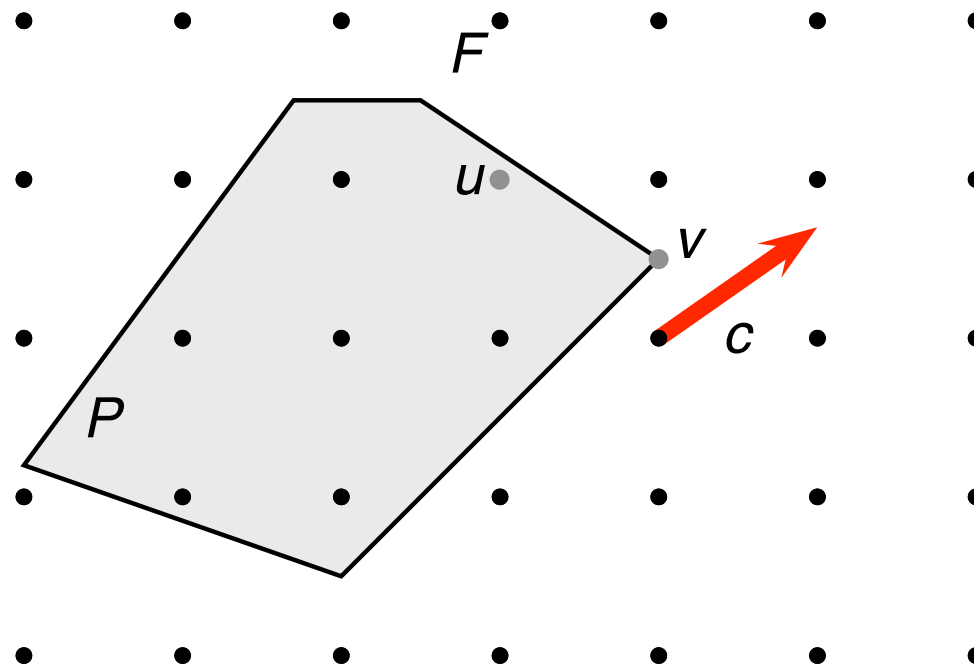
Programmation linéaire en nombres entiers

PLNE

Un programme linéaire en nombres entiers est un problème de la forme suivante

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \\ & x \in \mathbb{Z}^n, \end{aligned} \tag{41}$$

où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$



Relaxation

Définition (Relaxation linéaire)

Le PL

$$\begin{aligned} \max c^T x \\ Ax \leq b \\ x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{42}$$

est la **relaxation linéaire** du PLNE (41).

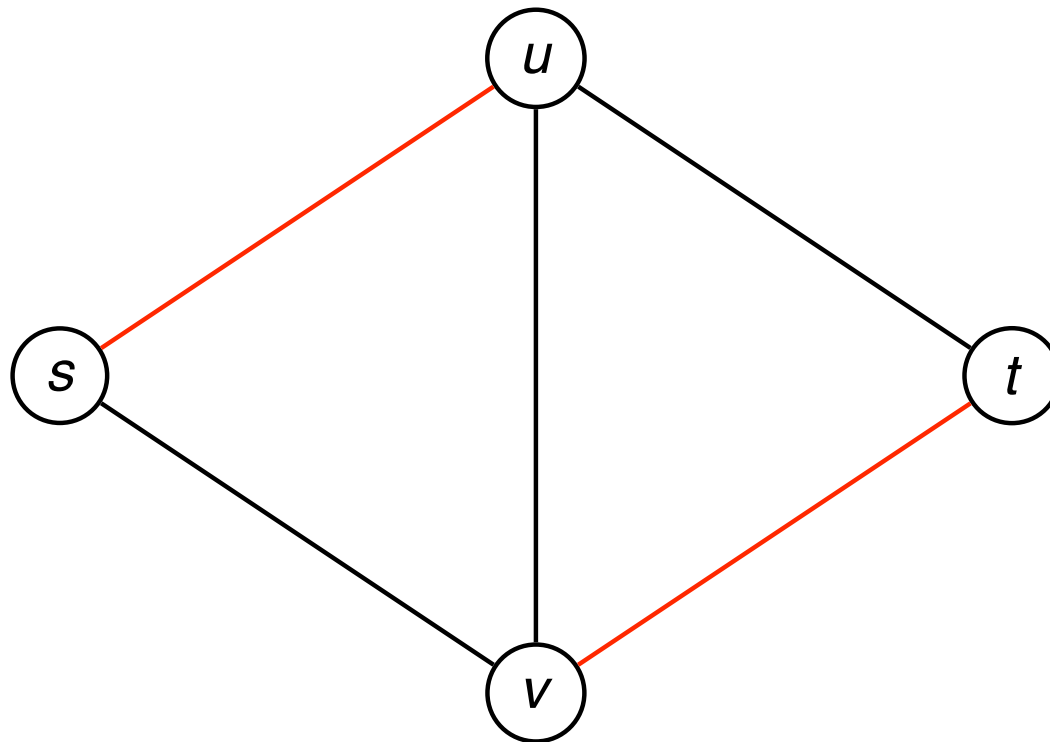
Lemme

Si x^ est une solution optimale de la relaxation linéaire et si on a de plus $x^* \in \mathbb{Z}^n$, alors x^* est une solution optimale du PLNE.*

Graphes et couplages

Définition

Un **graphe** est un couple $G = (V, E)$ où V est un ensemble fini (les sommets ou nœuds) et $E \subseteq \binom{V}{2}$ est l'ensemble des arêtes. Un **couplage** de G est un ensemble $M \subseteq E$ tel que pour $e_1, e_2 \in M$ avec $e_1 \neq e_2$ on a $e_1 \cap e_2 = \emptyset$.



Arêtes adjacentes

Définition (Arêtes adjacentes (ou incidentes) à un sommet)

Pour un sommet $v \in V$, l'ensemble $\delta(v) = \{e \in E : v \in e\}$ représente l'ensemble des arêtes **adjacentes** (ou **incidentes**) au sommet v .

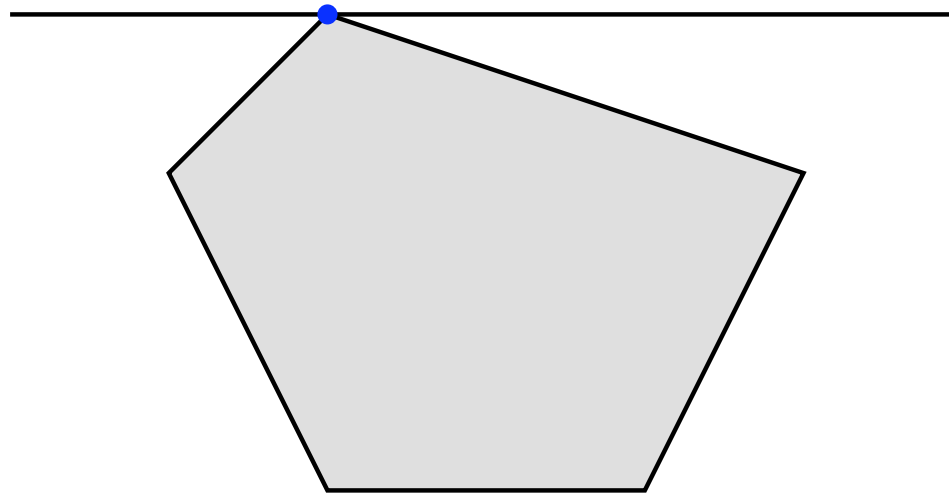
Utilisant cette définition, le problème du couplage à poids maximum peut s'écrire comme suit sous forme d'un PLNE.

$$\begin{aligned} & \max \sum_{e \in E} w(e)x(e) \\ & v \in V : \sum_{e \in \delta(v)} x(e) \leq 1 \\ & e \in E : x(e) \geq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^{|E|}. \end{aligned} \tag{43}$$

Faces et sommets

Définition (Inégalité valide, face, sommet)

Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ un polyèdre. Une inégalité $c^T x \leq \beta$ est appelé **valide** pour P si $c^T x^* \leq \beta$ pour tout $x^* \in P$. Une **face** de P est un ensemble de la forme $P \cap \{x \in \mathbb{R}^n : c^T x = \beta\}$ pour une inégalité valide $c^T x \leq \beta$ de P . Si une face consiste d'un seul point, alors on dit qu'elle est un **sommet** de P .



Polyèdre intégral et l'algorithme du simplexe

Définition

Un polyèdre rationnel est appelé **intégral** si chaque face non-vide de P contient un vecteur intégral.

Lemme

Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ un polyèdre intégral où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice de rang-colonne plein. Si le programme linéaire

$$\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\} \quad (44)$$

est admissible et borné, alors la méthode du simplexe rend une solution optimale intégrale du programme linéaire (44).

Matrices totalement unimodulaires

Lemme

Soit $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ une matrice intégrale est inversible. Alors $A^{-1}b \in \mathbb{Z}^n$ pour tout $b \in \mathbb{Z}^n$ si et seulement si $\det(A) = \pm 1$.

Définition

Une matrice intégrale $A \in \{0, \pm 1\}^{m \times n}$ est appelé **totalement unimodulaire** si tout sous-matrice carré de A a un déterminant $0, \pm 1$.

Théorème (Hoffman-Kruskal Theorem)

Soit $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ une matrice intégrale. Alors le polyèdre $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ est intégrale pour tout $b \in \mathbb{Z}^m$ si et seulement si A est totalement unimodulaire.

Graphes bipartis

Définition

Un graphe $G = (V, E)$ est **biparti**, si l'ensemble des sommets V peut être partitionné en deux ensembles A et B tel que chaque arête $\{u, v\} \in E$ a une extrémité en A et l'autre dans B .

Définition

La matrice d'incidence **sommets-arêtes** d'un graphe $G = (V, E)$ est la matrice $A \in \{0, 1\}^{|V| \times |E|}$ défini par

$$A(v, e) = \begin{cases} 1, & \text{if } v \in e, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Lemme

Si G est un graphe biparti, alors la matrice d'incidence qui correspond à G est totalement unimodulaire.

Dualité : Couvertures

Définition

Une **couverture de sommets** d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $C \subseteq V$ des sommets tel que $e \cap C \neq \emptyset$ pour tout $e \in E$.

$$\begin{aligned} \min \sum_{v \in V} w(v)x(v) \\ uv \in E : x(u) + x(v) \geq 1 \\ v \in V : x(v) \geq 0 \\ x \in \mathbb{Z}^V. \end{aligned} \tag{45}$$

Clairement, ce PLNE peut se réécrire comme suit.

$$\min\{w^T x : A^T x \geq 1, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^V\}, \tag{46}$$

où A est la matrice d'incidence sommets-arêtes de G .

Théorème de König

Théorème (König's theorem)

Pour tout graphe biparti, le nombre d'arêtes dans un couplage maximum est égal au nombre de sommets dans une couverture de sommets minimum.