CM 11

Graphes

Marches, chemins et distances

Cours Optimisation Discrète 12 mai 2011

Friedrich Eisenbrand
EPFL

La borne et le prix

Prix de 1.000 Francs Suisses

Pour l'étudiant de mon cours (inscrit en Optimisation Discrète en 2011 à l'EPFL) qui prouvera une borne supérieure polynômiale sur $D(n, m)$ ou qui réfutera l'existence d'une telle borne pour l'abstraction de la base.

La borne et le prix

Prix de 2.000 Francs Suisses

Pour l'étudiant de mon cours (inscrit en Optimisation Discrète en 2011 à l'EPFL) qui prouvera une borne supérieure polynômiale sur $D(n, m)$ ou qui réfutera l'existence d'une telle borne pour l'abstraction de la base.

Toutefois, il existe un algorithme polynômial pour la programmation linéaire

Taille de l'entrée

- Taille de l'entier a : $\lceil \log(|a| + 1) \rceil$
- Taille du nombre rationnel p/q avec $\gcd(p, q) = 1$: $\text{taille}(p) + \text{taille}(q)$
- Taille de la matrice $A \in \mathbb{Q}^{m \times n}$: $m \cdot n \cdot \text{taille}(U)$, où U est un majorant des numérateurs et dénominateurs des entrées.
- Taille du vecteur $v \in \mathbb{Q}^n$: $n \cdot \text{taille}(U)$, où U est un majorant des numérateurs et dénominateurs des entrées.

Algorithme en temps polynômial pour la programmation linéaire

Théorème (Khachiyan 79)

Il existe un algorithme pour résoudre le programme linéaire

$$\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n, \, Ax \leq b\}$$

qui effectue un nombre polynômial d'opérations arithmétiques sur des nombres rationnels de taille polynômiale. Polynômial signifie ici $O(n^k)$ pour une constante k, et n est un majorant des tailles de A, b et c.

Graphes orientés

Définition

Un graphe orienté est un couple $G = (V, A)$, où V est un ensemble fini, dont les éléments sont appelés sommets de G et $A \subseteq (V \times V)$ est l'ensemble des arcs de G. Nous indiquons un arc par ses deux sommets définissant $(u, v) \in A$. Les sommets u et v sont appelés extrémité initiale et extrémité finale de l'arc (u, v) respectivement.

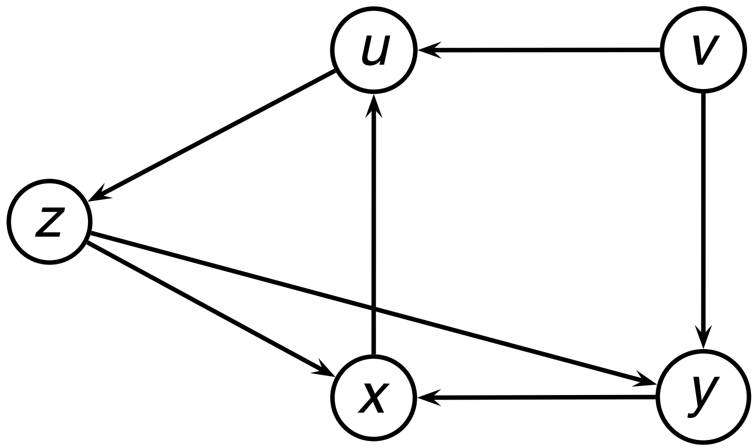


FIGURE: Exemple d'un graphe orienté avec 5 sommets et 7 arcs.

Marches et chemins

Définition (Marche, chemin, distance)

Une marche est une séquence de la forme

$$P = (v_0, a_1, v_1, \ldots, v_{m-1}, a_m, v_m),$$

où $a_i = (v_{i-1}, v_i) \in A$ pour $i = 1, \ldots, m$. Si les sommets $v_0, \ldots, v_m$ sont tous différents alors P est un chemin. La longueur de P est m. La distance entre deux sommets u et v est la longueur d'un plus court chemin de u à v qu'on note par $d(u, v)$.

Exemple

Ce qui suit représente une marche et un chemin dans le graphe de la Figure 10.

$$u, (u, z), z, (z, x), x, (x, u), u, (u, z), z, (z, y), y$$
$$u, (u, z), z, (z, y), y$$

Représentation

Représentation

Un graphe ayant n sommets est représenté comme un tableau $A[v_1, \ldots, v_n]$, où la composante $A[v_i]$ est un pointeur vers une liste de sommets, les voisins de v_i. $N(v_i) = \{u \in V : (v_i, u) \in A\}$.

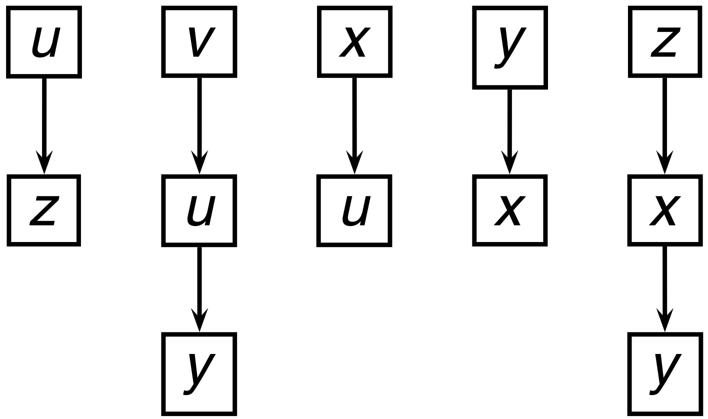


FIGURE: Représentation du graphe dans la Figure 10 par liste d'adjacence.

Breadth-first-search

Lemme

Soit $V_i \subseteq V$ l'ensemble de sommets qui sont à distance i de s. Pour $i = 1, \dots, n-1$, l'ensemble V_i est égal à l'ensemble de sommets $v \in V \setminus (V_0 \cup \cdots \cup V_{i-1})$ tel qu'il existe un arc $(u, v) \in A$ avec $u \in V_{i-1}$.

Breadth-first-search

L'algorithme maintient à jour les tableaux

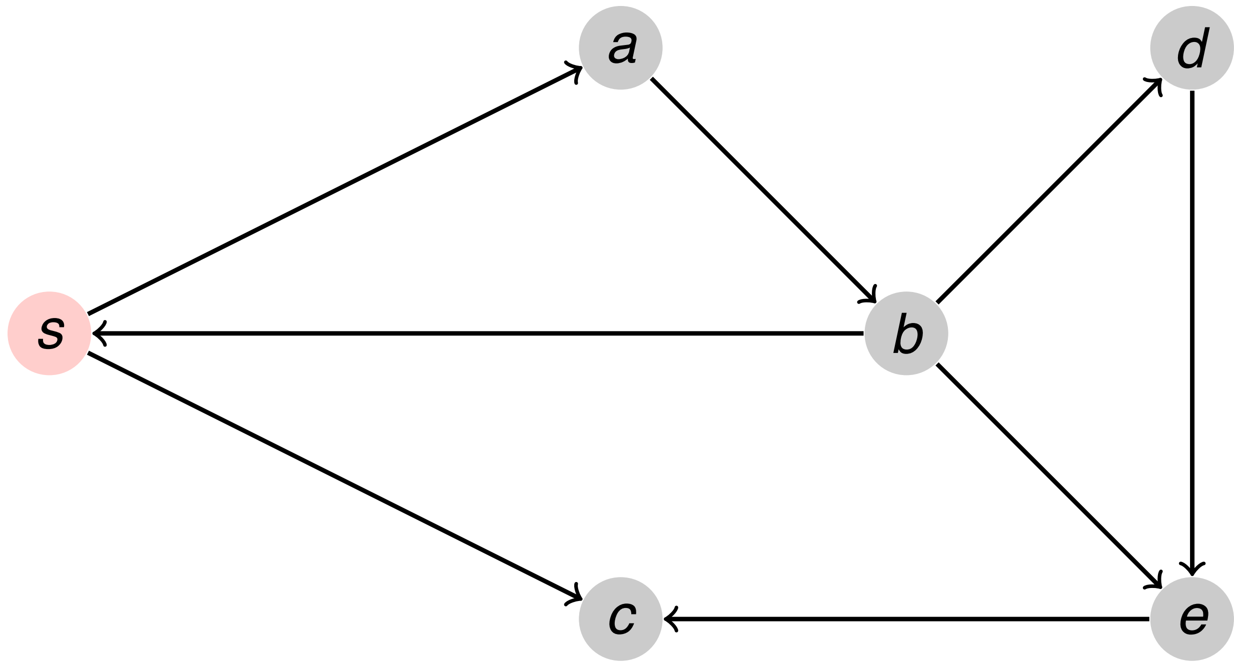
$$D[v_1 = s, v_2, \ldots, v_n]$$
$$\pi[v_1 = s, v_2, \ldots, v_n]$$

et une file d'attente Q qui contient seulement s au début.

breadth-first-search

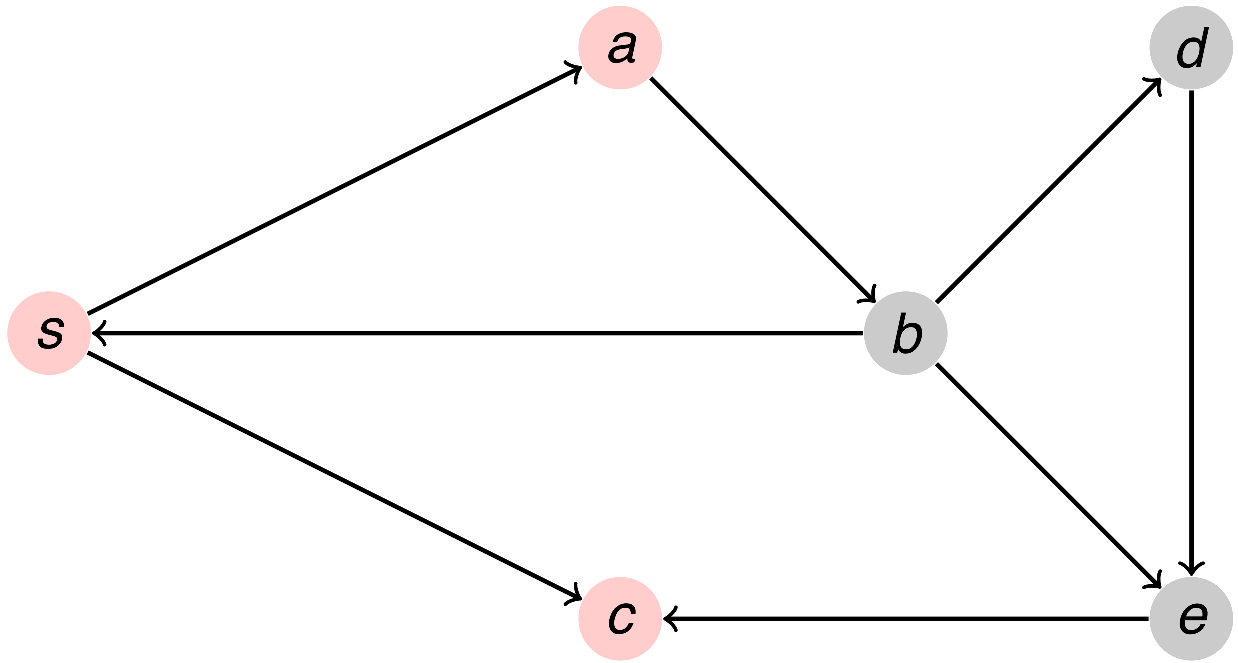
while $Q \neq \emptyset$
    $u := head(Q)$
    for each $v \in N(u)$
        if $(D[v] = \infty)$
            $\pi[v] := u$
            $D[v] := D[u] + 1$
            $enqueue(Q, v)$
    $dequeue(Q)$

Exemple



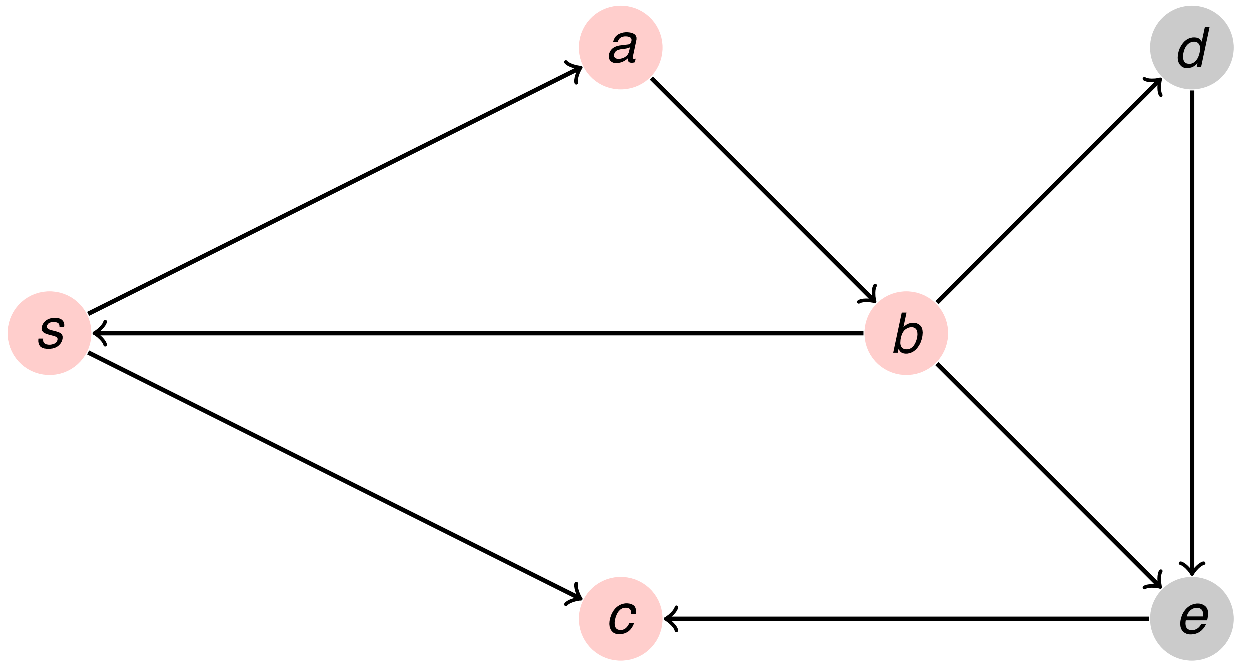
$$Q = [s]$$

Exemple



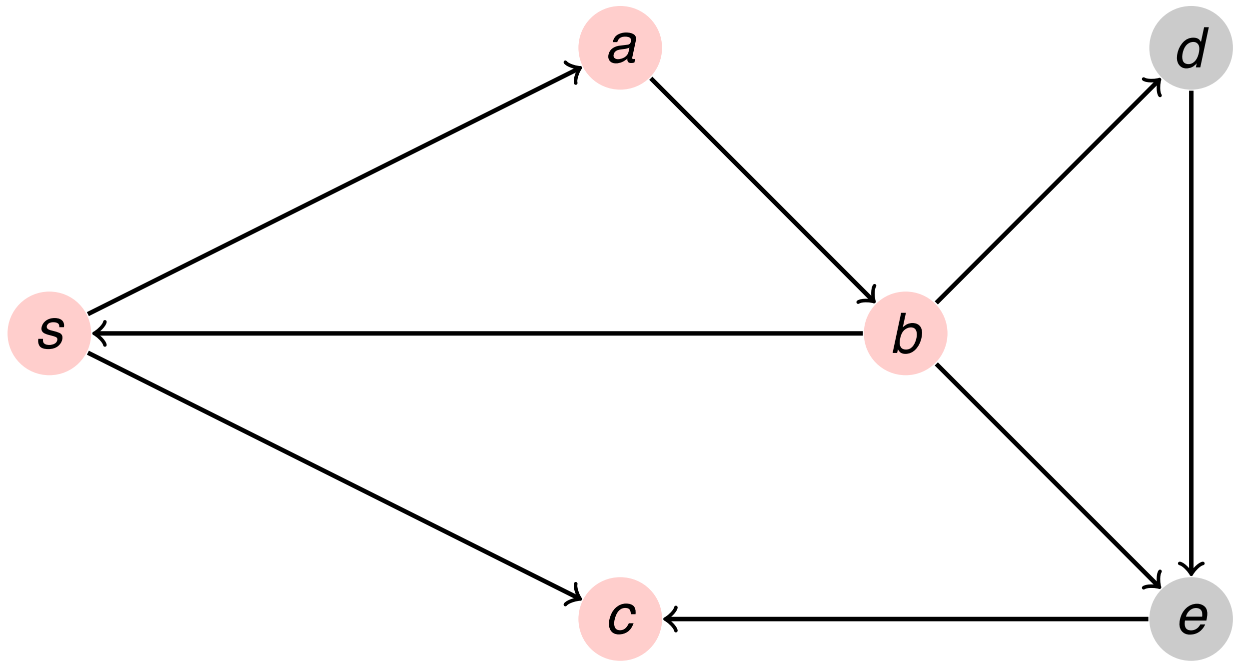
$$Q = [a, c]$$

Exemple



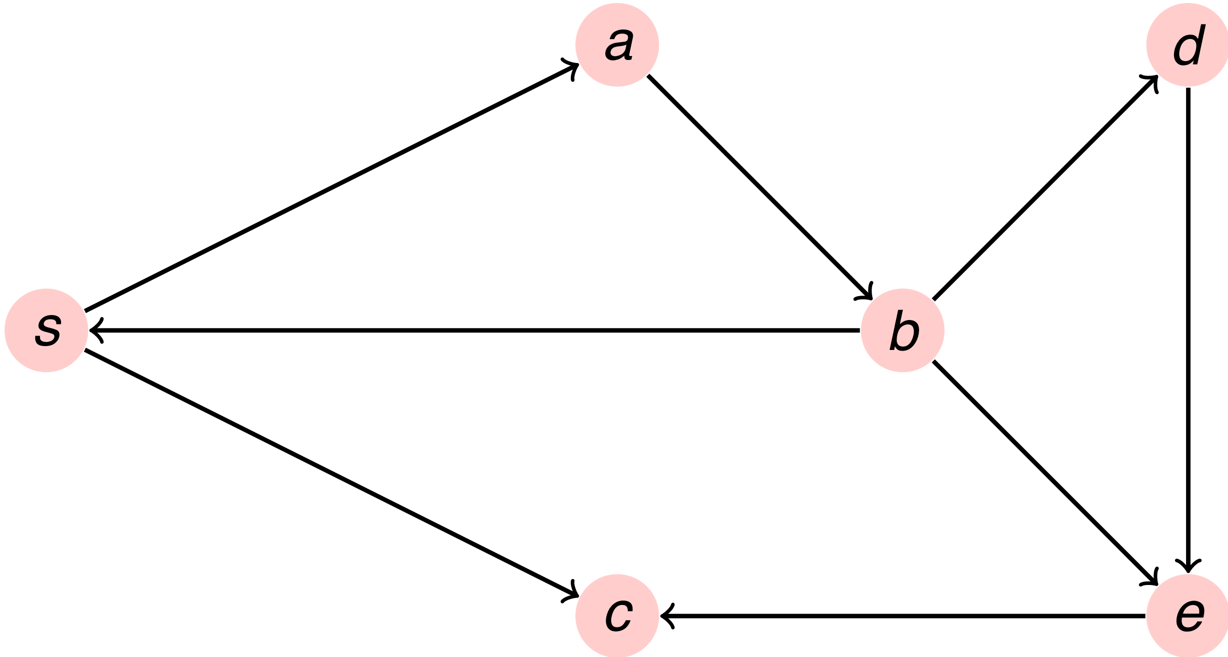
$$Q = [c, b]$$

Exemple



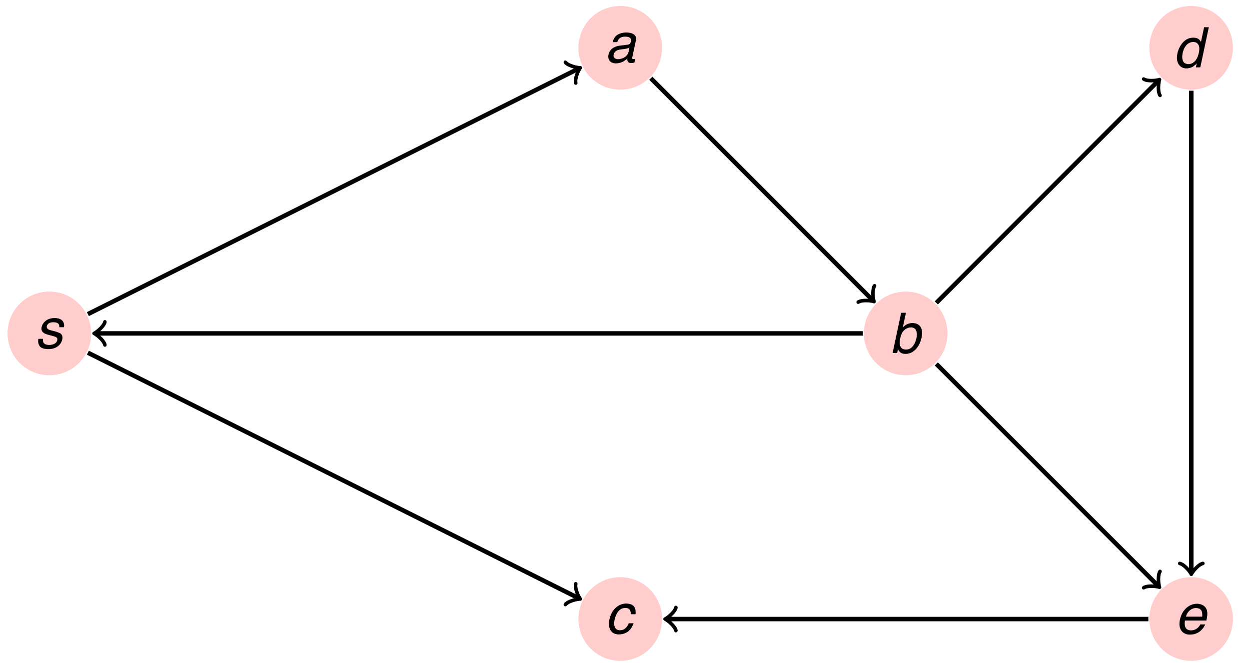
$$Q = [b]$$

Exemple



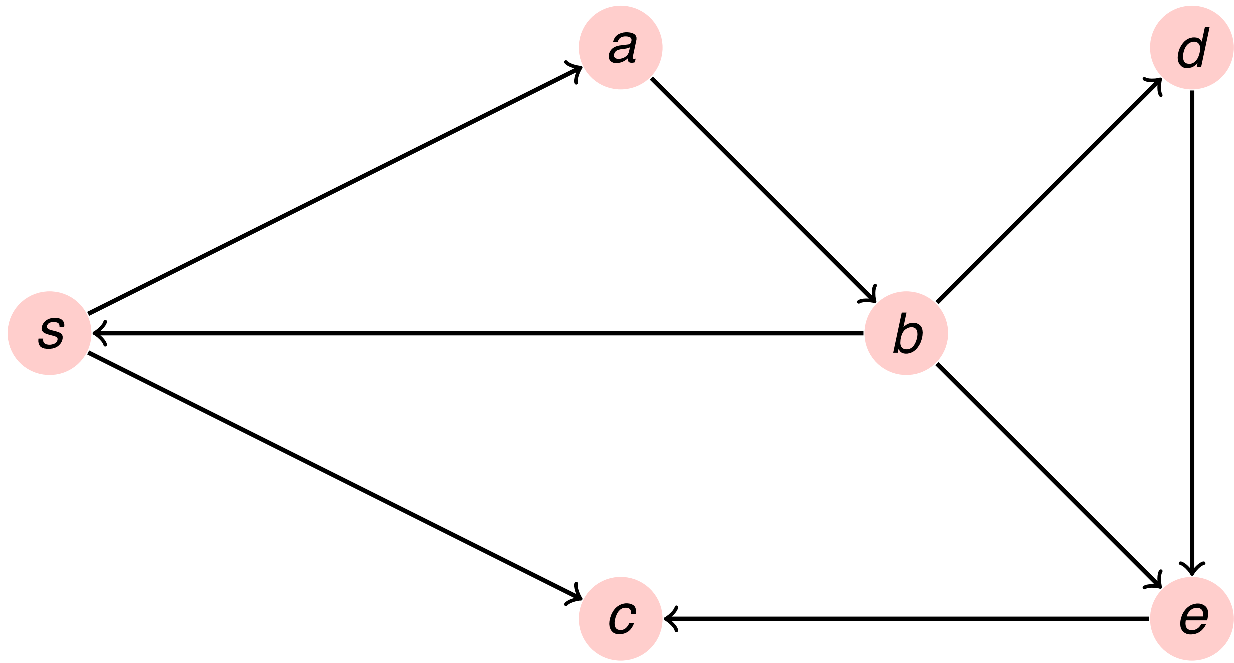
$$Q = [d, e]$$

Exemple



$$Q = [e]$$

Exemple



$$Q = []$$

Correction

Théorème

Breath-first-search attribue les labels D et π correctement.

Arbres

Définition (Arbre)

Un arbre orienté est un graphe orienté $T = (V, A)$ avec $|A| = |V| - 1$ et dans lequel il y a un sommet $r \in T$ tel qu'il existe un chemin de r à tous les autres sommets de T.

Lemme

Considérons les tableaux D et π quand l'algorithme de parcours en largeur a terminé. Le graphe $T = (V', A')$ où $V' = \{v \in V\colon D[v] < \infty\}$ et $A' = \{\pi(v)v\colon 1 \leq D[v] < \infty\}$ est un arbre.

Définition

L'arbre T mentionné ci-dessus est l'arbre des plus courts chemins du graphe orienté (non-pondéré) $G = (V, A)$.

Analyse de l'algorithme

Théorème

L'algorithme de parcours en largeur (breadth-first-search) se déroule en temps $O(|V| + |A|)$.

Graphes pondérés

Définition

Une marche pour laquelle le sommet de départ et celui d'arrivée coïncident est appelée cycle.

Définition

Soit un graphe orienté $D = (V, A)$ ainsi qu'une fonction de longueur $c : A \longrightarrow \mathbb{R}$. La longueur d'une marche W est définie comme

$$c(W) = \sum_{\substack{a \in A \\ a \in W}} c(a).$$

Théorème

Supposons que tout cycle dans D est de longueur non-négative et supposons qu'il existe une marche de s à t dans D. Alors il existe un chemin reliant s à t qui est de longueur minimale parmi toutes les marches reliant s et t.

Bellman-Ford

Algorithme de Bellman-Ford

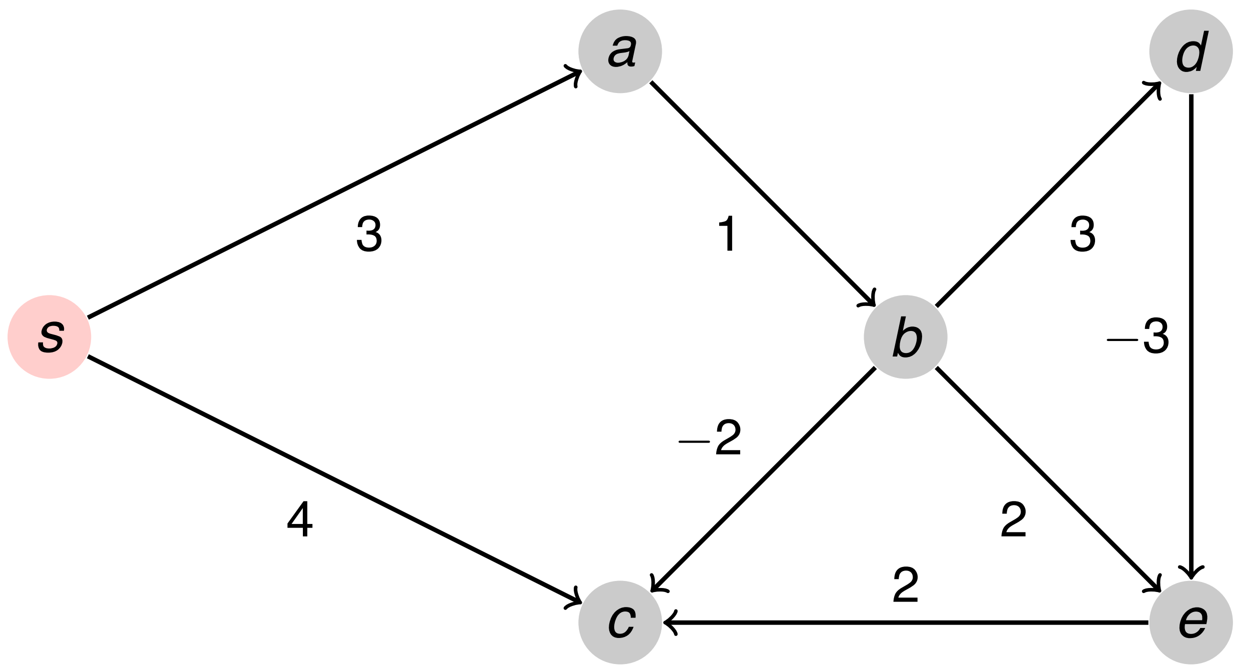
i) $f_0(s) = 0$, $f_0(v) = \infty$ pour tout $v \neq s$

ii) Pour $k < n$ si f_k a été trouvé, calculer

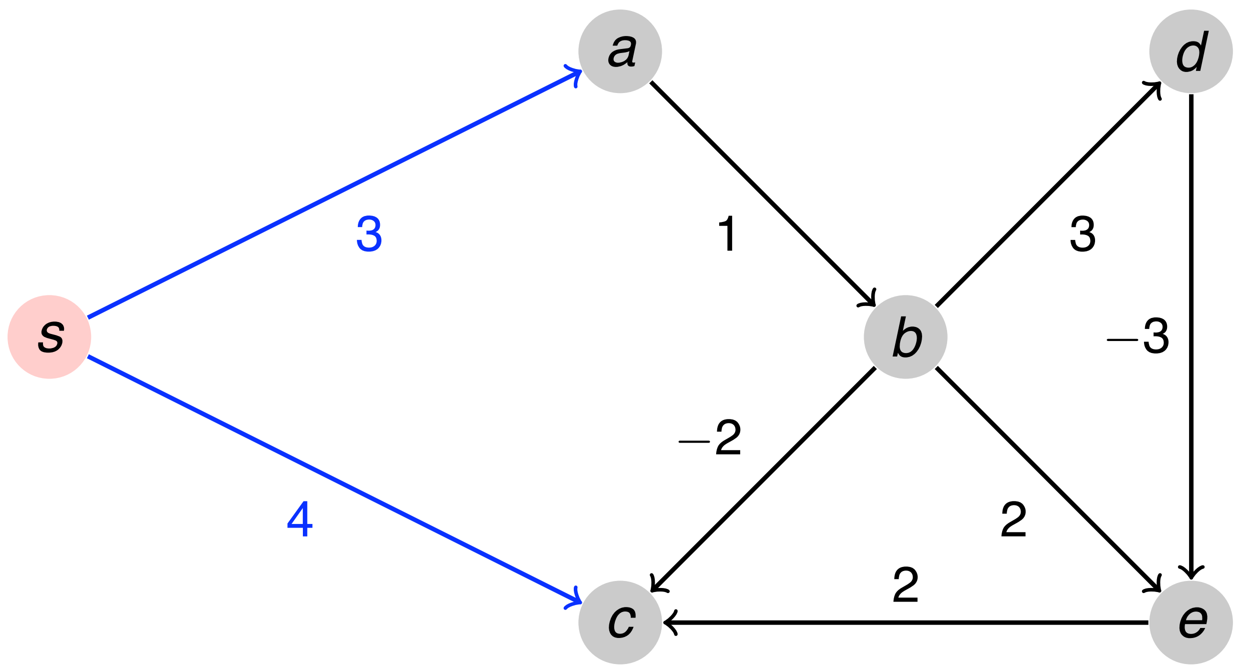
$$f_{k+1}(v) = \min\{f_k(v), \min_{(u,v)\in A}\{f_k(u) + c(u,v)\}$$

pour tout $v \in V$.

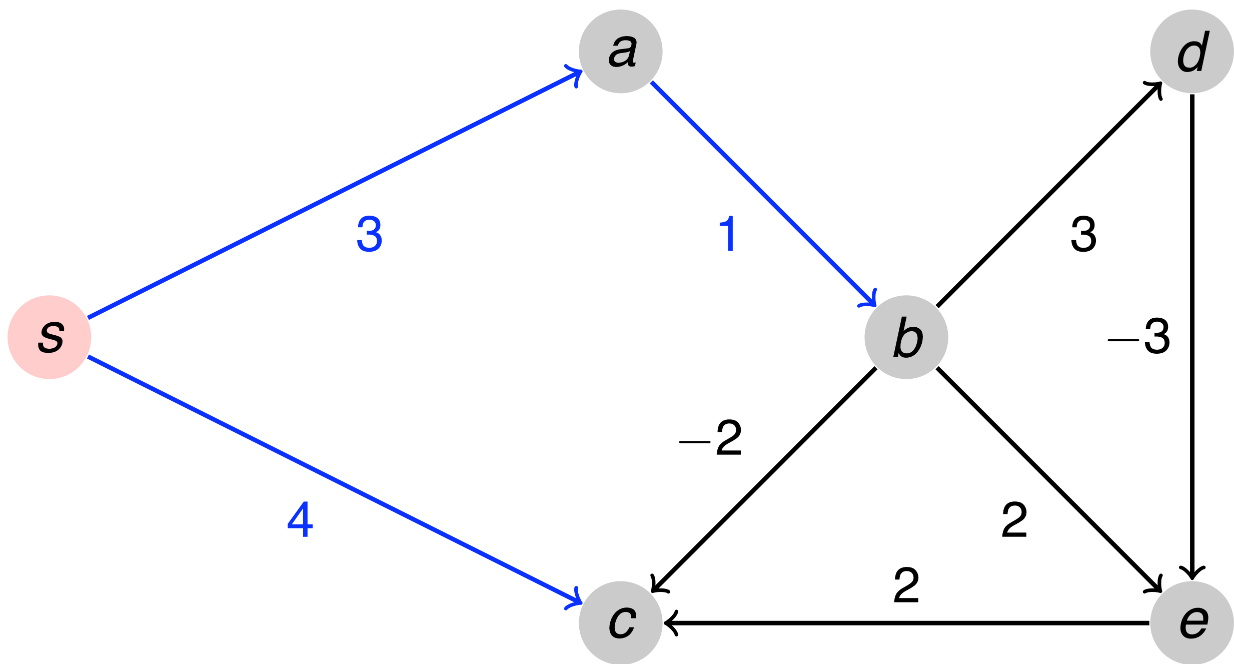
Exemple



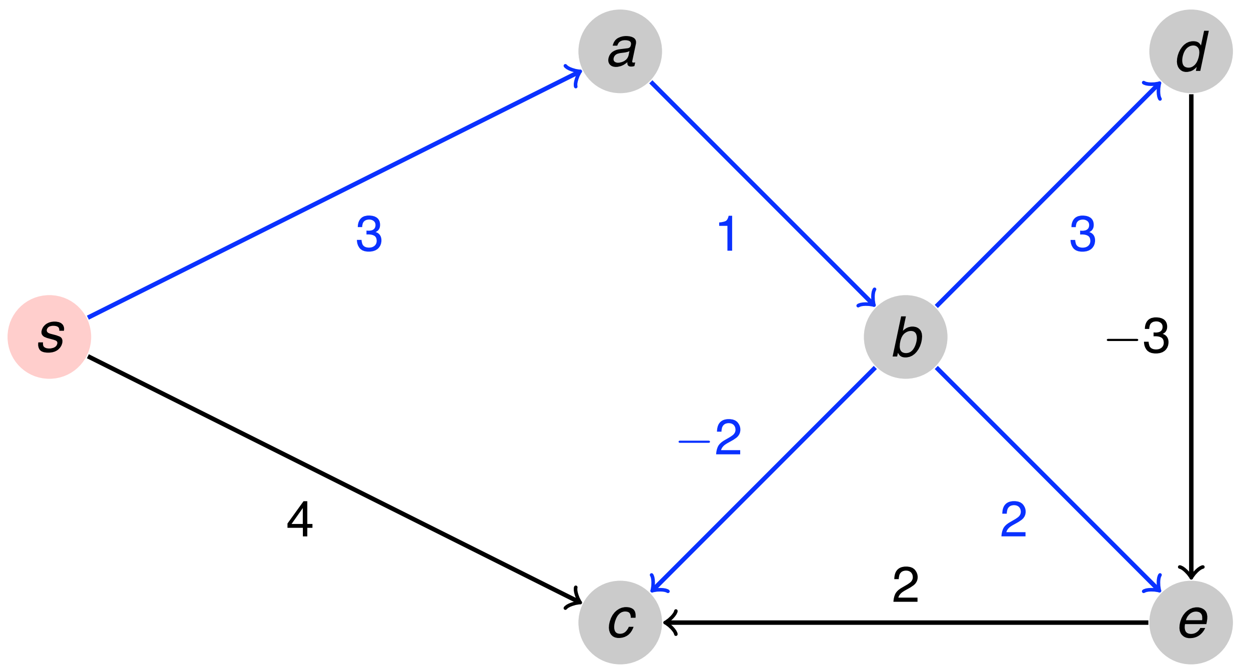
Exemple



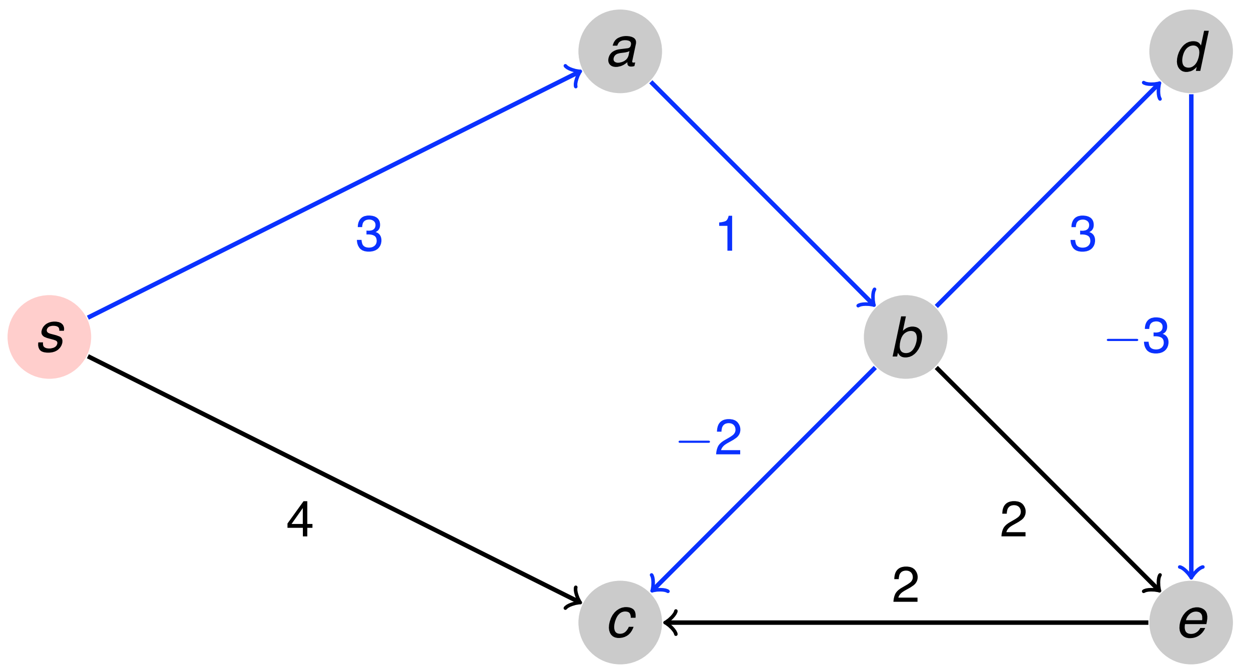
Exemple



Exemple



Exemple



Exemple