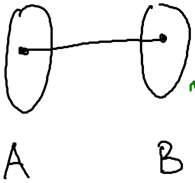
Un algorithme primal-dual pour couplage biparti

- Couplage parfait
- Relâchement complémentaire
- Couplage biparti : Solution primale-duale
- Augmenter la solution duale
- L'algorithme primal-dual

$G = (A \dot\cup B, E)$

$w : E \to \mathbb{R}$

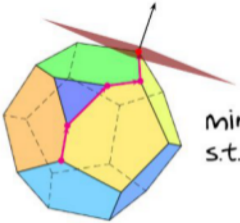


But : Trouver couplage parfait de poids min.

$\{u,v\} \in \binom{V}{2}$

$M \subseteq E$ est couplage parfait

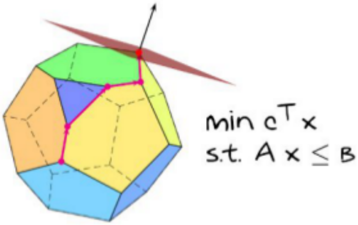
$\Leftrightarrow \bigcup_{e \in M} e = V$



$\min c^T x$
s.t. $Ax \leq b$

Un algorithme primal-dual pour couplage biparti

- Couplage parfait



Couplage parfait

Un couplage M dans un graphe $G = (V, E)$ non-orienté est dit *parfait* s'il n'existe pas de sommet exposé par M.

Problème du couplage parfait de poids minimal

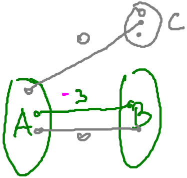
Pour $G = (V, E)$ pondéré avec $w : E \to \mathbb{R}$, le *problème du couplage parfait de poids minimal* est le problème de trouver un couplage parfait M tel que

$$w(M) = \sum_{e \in M} w_e \text{ est minimal.}$$

$\max\ w(M)$

$\mathrm{MIN}\ w(M)$

$|C| = |A| - |B|$



$|A| \geq |B|$

Couplage de poids maximal vs. couplage parfait de poids minimal

Théorème

S'il existe un algorithme en temps polynômial pour le *problème du couplage parfait de poids minimal*, alors il existe aussi un algorithme en temps polynômial pour trouver le couplage de poids maximal.

Couplage de poids maximal
vs. couplage parfait de poids minimal (graphe biparti)

Théorème

S'il existe un algorithme en temps polynômial pour le *problème du couplage parfait de poids minimal* dans un graphe *biparti*, alors il existe aussi un algorithme en temps polynômial pour trouver le couplage de poids maximal dans un graphe *biparti*.

Une formulation comme PLNE

$$x_e = \begin{cases} 1 & e \in M \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

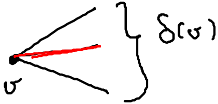
$$\min \sum_{e \in E} w_e \cdot x_e$$

$$\forall v \in V: \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1$$

$$x \geq 0$$

$$\boxed{x \in \mathbb{Z}^{|E|}}$$

Relaxation



$$\min w^T \cdot x$$

$$A_G \cdot x = \mathbb{1}$$

$$x \geq 0$$

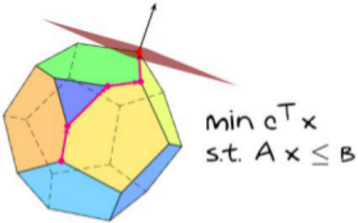
A_G

Dual: $\max \sum_{v \in V} y_v$

$$\forall uv \in E: y_u + y_v \leq w_{uv}$$

Un algorithme primal-dual pour couplage biparti

- Relâchement complémentaire



$$\max c^T x$$
$$Ax \leqslant b$$

$$\min b^T y$$
$$A^T y = c$$
$$y \geqslant 0$$

Théorème

Soit x^* et y^* admissible pour respectivement le primal et le dual. Alors x^* et y^* sont optimaux si et seulement si

$$(b - Ax^*)^T y^* = 0.$$

Si $y_i^* > 0$

alors $\underbrace{(b-Ax^*)_i}_{\geq 0} = 0$

Démonstration:

réécrire

$$\Leftrightarrow \quad b^T \cdot y^* - x^{*T} \cdot \underbrace{A^T \cdot y^*}_{= c} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad b^T \cdot y^* = c^T \cdot x^*$$

Quiz

$$\max c^T x \qquad Ax \leqslant b$$

$$\min b^T y \qquad A^T y = c \qquad y \geqslant 0$$

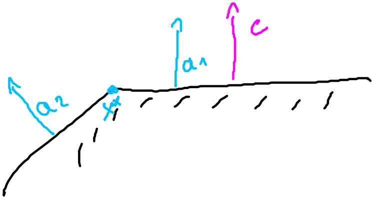
Supposons que x^* et y^* sont optimaux. L'affirmation suivante est-elle correcte :

Si $a_i^T x^* = b_i$, alors $y_i^* > 0$?

Avant : $y_i^* > 0 \implies a_i^T x^* = b_i$

$\Longleftarrow$?

Non !

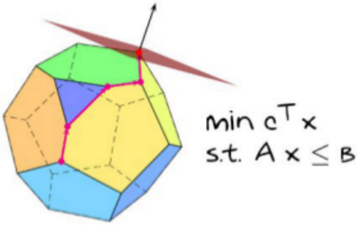


$a_1^T x^* = b_1$

$a_2^T x^* = b_2$

Un algorithme primal-dual pour couplage biparti

- Couplage biparti : Solution primale-duale



Couplage parfait : couple primal/dual

$$\min \sum_{e \in E} w_e \cdot x_e$$

$$v \in V : \quad \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1$$

$$x \geqslant 0$$

PL : Relax du PLNE

Couplage parfait : couple primal/dual

Si G_{y^*} contient un couplage parfait (π) alors π et y^* sont optimales.

$$\max \sum_{v \in V} y_v \qquad\qquad \min \sum_{e \in E} w_e \cdot x_e$$

$$uv \in E: \quad y_u + y_v \leqslant w_{uv} \qquad\qquad v \in V: \quad \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1$$

$$y \in \mathbb{R}^{|V|} \qquad\qquad x \geqslant 0$$

x^*, y^* sont optimales $\iff$ $x^*_e >$ alors $y^*_u + y^*_v = w_{uv}$

$G_{y^*} = (A \cup B, E^*_y)$

$E^*_y = \{uv : y^*_u + y^*_v = w_{uv}\}$

$(x^\pi|_e) > 0$ alors $y^*_u + y^*_v = w_{uv}$ où $e = uv$

Relaxation en PL pour couplage : Relâchement complémentaire

$$\max \sum_{v \in V} y_v$$

$$uv \in E: \quad y_u + y_v \leqslant w_{uv}$$
$$y \in \mathbb{R}^{|V|}$$

$$\min \sum_{e \in E} w_e \cdot x_e$$

$$v \in V: \quad \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1$$
$$x \geqslant 0$$

Théorème

x^* et y^* sont des solutions optimales des *programmes linéaires* correspondants si et seulement si

Pour tout $uv \in E$: $\quad x^*_{uv} > 0$ implique $y^*_u + y^*_v = w_{uv}$.

Critère de l'optimalité d'un couplage parfait

$$\max \sum_{v \in V} y_v$$

$$uv \in E: \quad y_u + y_v \leqslant w_{uv}$$
$$y \in \mathbb{R}^{|V|}$$

$$\min \sum_{e \in E} w_e \cdot x_e$$

$$v \in V: \quad \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1$$
$$x \geqslant 0$$

Critère

Soit $y^* \in \mathbb{R}^{|V|}$ admissible et soit $G_{y^*} = (V, E_{y^*})$ le graphe avec arêtes

$$E_{y^*} = \{uv \in E \colon y_u^* + y_v^* = w_{uv}\}.$$

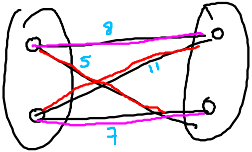
Si G_{y^*} admet un couplage parfait M, alors y^* et χ^M sont des solutions optimales des programmes linéaires correspondants.

En particulier, M est un couplage parfait de *poids minimal*.

Quiz

$$y_1 + y_3 \leq 8$$
$$y_1 + y_4 = 5$$
$$y_2 + y_3 = 11$$
$$y_2 + y_4 \leq 7$$

$\leftarrow$ INADMISSIBLE



Quiz

Y a-t-il des rationnels y_1, y_2, y_3, y_4 tels que

$$\begin{aligned} y_1 + y_3 &\leqslant 5 \\ y_1 + y_4 &= 2 \\ y_2 + y_3 &= 9 \\ y_2 + y_4 &\leqslant 3 \end{aligned}$$

Aperçu de l'algorithme primal/dual

- Input : graphe biparti complet $G = (A \dot\cup B, E)$ et poids $w : E \to \mathbb{R}$
- But : Trouver le couplage *parfait* de poids minimal.
- *Maintenir :* Solution duale $y^* \in \mathbb{R}^{|E|}$

Augmente y^*

$$\max \sum_{v \in V} y_v$$

$$uv \in E: \quad y_u + y_v \leqslant w_{uv}$$

$$y \in \mathbb{R}^{|V|}$$

- G_{y^*} devient plus en plus prôche a avoir un couplage parfait

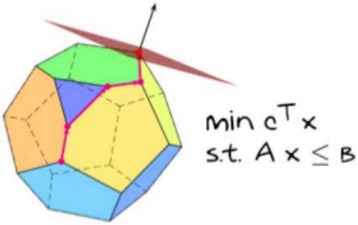
$$\min \sum_{e \in E} w_e \cdot x_e$$

$$v \in V: \quad \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1$$

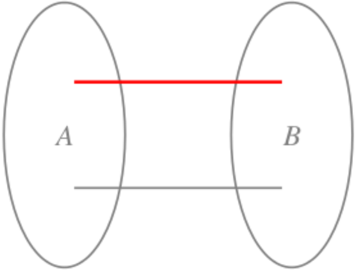
$$x \geqslant 0$$

Un algorithme primal-dual pour couplage biparti

- Augmenter la solution duale



Couplage de cardinalité maximale dans G_{y^*}

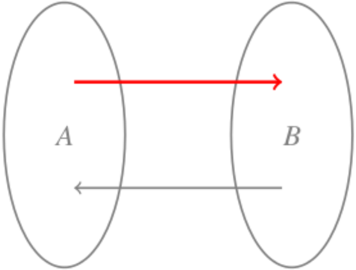


y^*

$$\max \sum_{v \in V} y_v$$

$$\begin{aligned} uv \in E: \quad & y_u + y_v \leqslant w_{uv} \\ & y \in \mathbb{R}^{|V|} \end{aligned}$$

Couplage de cardinalité maximale dans G_{y^*}



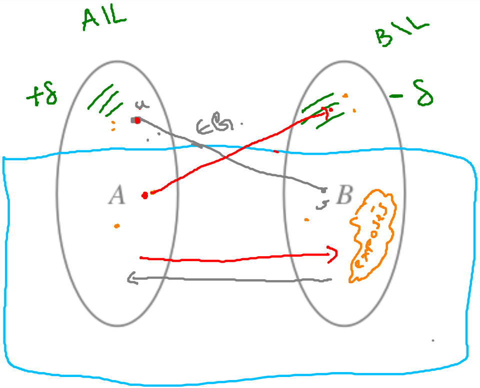
$|M|$ max

$$\max \sum_{v \in V} y_v$$

$$uv \in E: \quad y_u + y_v \leqslant w_{uv}$$

$$y \in \mathbb{R}^{|V|}$$

Couplage de cardinalité maximale dans G_{y^*}



$L \subseteq V$ atteignables des sommets exposés en B

$$\max \sum_{v \in V} y_v$$

$$uv \in E: \quad y_u + y_v \leqslant w_{uv}$$
$$y \in \mathbb{R}^{|V|}$$

$y^*_u + y^*_v < w_{uv}$

$\delta = \min\{ w_{uv} - y^*_u - y^*_v : u \in A \setminus L,\ v \in B \cap L \}$

$$\tilde{y}_v = \begin{cases} y^*_v + \delta & : v \in A \setminus L \\ y^*_v - \delta & : v \in B \setminus L \\ y^*_v & \text{autrement} \end{cases}$$

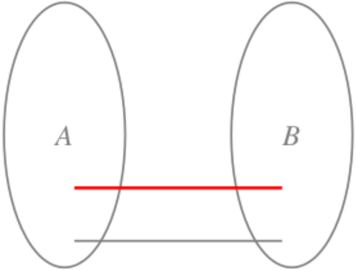
admissible

$G_{\tilde{y}}$: M est couplage

L augmente

Augmenter la solution duale

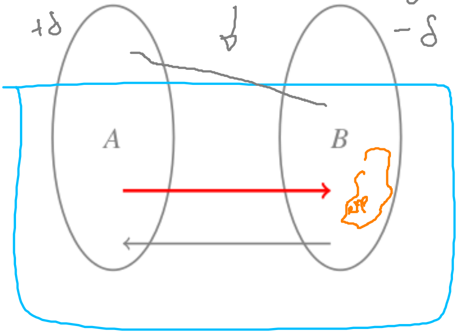
- Input: y^* et un couplage non-parfait M dans G_{y^*}.
- Orienter les arêtes
- Calculer $L \subseteq V$ l'ensemble des sommets qui sont accessibles depuis des sommets exposés dans B.
- Soit $\delta = \min\{w_{uv} - y^*_u - y^*_v : u \in A \setminus L, v \in L \cap B\}$
- $\widetilde{y} = \begin{cases} y^*_u + \delta & \text{for } u \in A \setminus L \\ y^*_u - \delta & \text{for } u \in B \setminus L \\ y^*_u & \text{otherwise.} \end{cases}$



Augmenter la solution duale

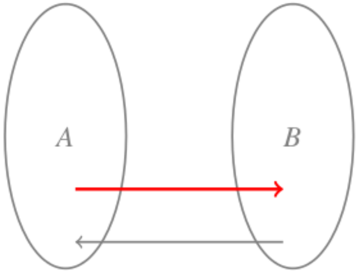
n'existent pas en G_{y^*}

- Input: y^* et un couplage non-parfait M dans G_{y^*}.
- Orienter les arêtes
- Calculer $L \subseteq V$ l'ensemble des sommets qui sont accessibles depuis des sommets exposés dans B.
- Soit $\delta = \min\{w_{uv} - y_u^* - y_v^* : u \in A \setminus L, v \in L \cap B\}$
- $\widetilde{y} = \begin{cases} y_u^* + \delta & \text{for } u \in A \setminus L \\ y_u^* - \delta & \text{for } u \in B \setminus L \\ y_u^* & \text{otherwise.} \end{cases}$



Augmenter la solution duale

- Input: y^* et un couplage non-parfait M dans G_{y^*}.
- Orienter les arêtes
- Calculer $L \subseteq V$ l'ensemble des sommets qui sont accessibles depuis des sommets exposés dans B.
- Soit $\delta = \min\{w_{uv} - y_u^* - y_v^* : u \in A \setminus L, v \in L \cap B\}$
- $\widetilde{y} = \begin{cases} y_u^* + \delta & \text{for } u \in A \setminus L \\ y_u^* - \delta & \text{for } u \in B \setminus L \\ y_u^* & \text{otherwise.} \end{cases}$

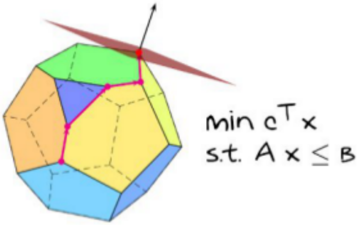


- **Aucune arête du couplage disparaît**
- **L'ensemble L grandit (strictement)**

Exemple

Un algorithme primal-dual pour couplage biparti

- L'algorithme primal-dual



L'algorithme primal-dual

Input: $G = (A\dot{\cup}B, E)$ graphe biparti complet, $w : E \to \mathbb{R}$

Output: couplage parfait M de poids minimal

$|A| = |B|$

$M = \emptyset$, $y^* = 0$

`while` M n'est pas un couplage parfait

Augmenter y^*

`if` M n'est pas un couplage de cardinalité maximale dans G_{y^*}

augmenter M

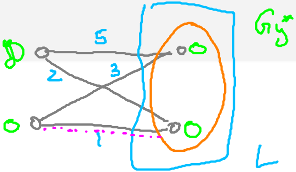
Combien d'itérations avec de même M ?

$O(|V|)$

Combien d'augmentations en M ?

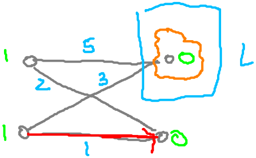
$O(|V|)$

L'algorithme primal-dual



Input: $G = (A \dot{\cup} B, E)$ graphe biparti complet, $w : E \to \mathbb{R}$
Output: couplage parfait M de poids minimal

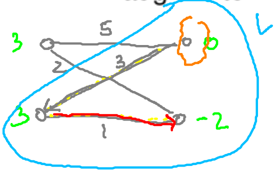
$\delta = 1$



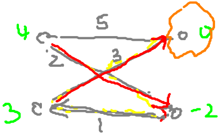
$M = \emptyset$, $y^* = 0$
`while` M n'est pas un couplage parfait
  Augmenter y^*
  `if` M n'est pas un couplage de cardinalité maximale dans G_{y^*}
    augmenter M

$\delta = 2$

$n : 5$



$\delta = 1$



$5 = 4 + 3 - 2$

~~Exemple~~ Analyse:

Itérations $O(|V|^2)$

$$O\Big(\underbrace{(|V|+|E|)}_{\substack{\text{augmenter} \\ m}} \cdot \underbrace{|V|^2}_{\#\ \text{itérations}}\Big) = O(|V|^4)$$

$$|E| = O(|V|^2)$$