CM 7
Dualité (2)

Cours *Optimisation Discrète* 7 avril 2011

Friedrich Eisenbrand
EPFL

Le PL dual

PL primal

$$\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n, Ax \leq b\} \tag{38}$$

Récapitulation : PL dual

Le PL

$$\min\{b^T y : y \in \mathbb{R}^m, A^T y = c, y \geq 0\} \tag{39}$$

est le PL dual du PL (38)

Interprétation de l'algorithme du simplexe

Toits et solutions admissibles sous forme duale

- B étant un toit implique $\lambda^T A_B = c^T$ avec $\lambda \geq 0$
- Donc y, où $y_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \notin B \\ \lambda_{f_B(i)} & \text{si } i \in B \end{cases}$, est une solution admissible du PL sous forme duale.
- L'objectif : $b^T y = \sum_{i \in B} b_i \lambda_{f_B(i)} = \sum_{i \in B} a_i x_B^* \lambda_{f_B(i)} = c^T x_B^*$ est la valeur de l'objectif pour le sommet du toit.

Interprétation

L'algorithme du simplexe maintient une solution admissible sous forme duale et diminue l'objectif de cette solution jusqu'à ce que le sommet du toit soit une solution admissible sous forme primale.

Corollaire

Si le PL (39) *est admissible et borné, alors le PL* (38) *est aussi admissible et borné. De plus, les deux PL ont des solutions optimales et les valeur objectives correspondantes sont identiques.*

Combinaisons possibles

P \ D	admissible et borné	non borné	inadmissible
admissible et borné	possible	impossible	impossible
non borné	impossible	impossible	possible
inadmissible	impossible	possible	possible

Recette de dualisation

		forme primale		forme duale
variables		$x_1, \ldots, x_n$		$y_1, \ldots, y_m$
matrice		A		A^T
membre de droite		b		c
fonction objectif		$\max c^T x$		$\min b^T y$
contraintes	$\leq$	pour contrainte i		$y_i \geq 0$
	$\geq$			$y_i \leq 0$
	$=$			$y_i \in \mathbb{R}$
		$x_j \geq 0$	$\geq$	pour contrainte j
		$x_j \leq 0$	$\leq$	
		$x_j \in \mathbb{R}$	$=$	

Programmes linéaires sous la forme primale et duale

Exemple

$$
\begin{array}{llcrl}
\max & 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 & & & \\
\rightarrow & -x_1 + 2x_2 & \leq & 1 & \\
\rightarrow & 3x_1 \;-\; x_2 & \geq & 2 & \\
\rightarrow & \quad\quad 3x_2 + x_3 & = & 3 & \\
\rightarrow & x_1 \in \mathbb{R} & & & \\
\rightarrow & x_2 \geq 0 & & & \\
\rightarrow & x_3 \leq 0 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llcr}
\min & y_1 + 2y_2 + 3y_3 & & \\
 & y_1 \geq 0 & & \\
 & y_2 \leq 0 & & \\
 & y_3 \in \mathbb{R} & & \\
 & -y_1 + 3y_2 & = & 5 \\
 & 2y_1 - y_2 + 3y_3 & \geq & 6 \\
 & \quad\quad\quad y_3 & \leq & 4
\end{array}
$$

Programmes linéaires sous la forme primale et duale

Exemple

$$
\begin{array}{ll}
\max & -y_1 - 2y_2 - 3y_3 \\
& y_1 \geq 0 \\
& y_2 \leq 0 \\
& y_3 \in \mathbb{R} \\
& \begin{array}{rcr} y_1 - 3y_2 & = & -5 \\ -2y_1 + y_2 - 3y_3 & \leq & -6 \\ -y_3 & \geq & -4 \end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\min & -5x_1 - 6x_2 - 4x_3 \\
& \begin{array}{rcr} x_1 - 2x_2 & \geq & -1 \\ -3x_1 + x_2 & \leq & -2 \\ -3x_2 - x_3 & = & -3 \end{array} \\
& x_1 \in \mathbb{R} \\
& x_2 \geq 0 \\
& x_3 \leq 0
\end{array}
$$

Un jeu

Les joueurs :

- Joueur (J1) choisit une ligne i, joueur (J2) choisit une colonne j
- Récompense de J1 : $A(i,j)$, perte de J2 : $A(i,j)$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{40}$$

But

- J1 veut trouver i tel que $\min_j A(i,j)$ est maximal
- J2 veut trouver j tel que $\max_i A(i,j)$ est minimal

Lemme

$$\max_i \min_j A(i,j) \leq \min_j \max_i A(i,j)$$

et cette inégalité peut être stricte.

Stratégie mixte

- J1 : $x \in \mathbb{R}^m_{\geq 0}$ tel que $\sum_{i=1}^m x_i = 1$
- J2 : $y \in \mathbb{R}^n_{\geq 0}$ tel que $\sum_{j=1}^n y_j = 1$
- J1 et J2 choisissent aléatoirement respectivement une ligne et une colonne selon les distributions x et y
- Espérance du profit de J1 :

$$E[Profit] = x^T A y$$

Théorème (Théorème Minimax)

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^T A y = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} x^T A y,$$

où X et Y sont les ensembles des stratégies mixtes de J1 et J2 respectivement.

Objectifs

- PL dual et récapitulation de la dualité faible ✔
- Dualité forte ✔
- Quelques exemples ✔
- La théorie des jeux matrices, théorème Minimax ✔