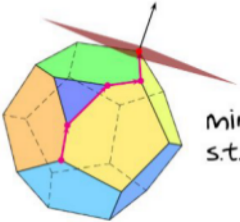
La méthode du simplexe

George Dantzig

- Sommets adjacents
- Idée fondamentale de l'algorithme du simplexe



$$\min c^T x$$
$$\text{s.t. } A x \leq B$$

Récapitulation

Max $c^T \cdot x$

$Ax \le b$

$x \in \mathbb{R}^n$

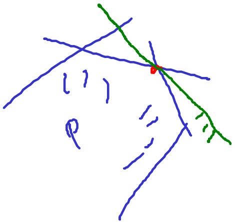
$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Supposons rang(A) $= n$

$x^* \in P$ sommet $\iff \exists B \subseteq \{1, \dots, m\}$

t.q. • A_B est inversible

• $A_B^{-1} \cdot b_B = x^*$



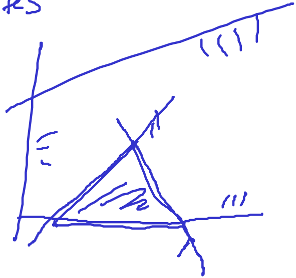
Sommets adjacents

Deux sommets distincts x_1 et x_2 de $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leqslant b\}$ sont *adjacents*, s'il existe $n-1$ inégalités de $Ax \leqslant b$ qui sont *linéairement indépendantes* et actives aussi bien à x_1 qu'à x_2.

$$\left.\begin{array}{l} a_1^T x \leq b_1 \\ \vdots \\ a_n^T x \leq b_n \end{array}\right\}$$

sont linéairement indép.

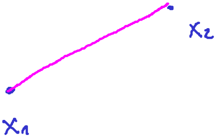
si $a_1, \ldots, a_k$ sont linéairement indépendantes



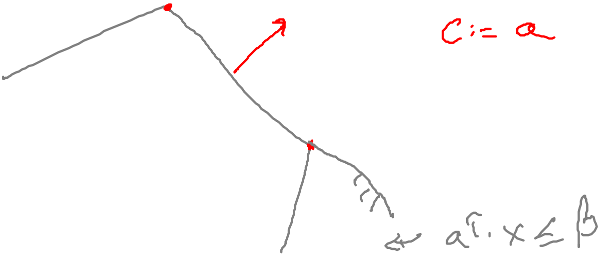
Sommets adjacents

Théorème

$x_1 \neq x_2 \in P$ sont adjacents si et seulement s'il existe $c \in \mathbb{R}^n$ de telle façon que l'ensemble des solutions optimales de $\max\{c^T x : x \in P\}$ soit $\underbrace{\{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 : \lambda \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}}_{\text{un segment}}$.



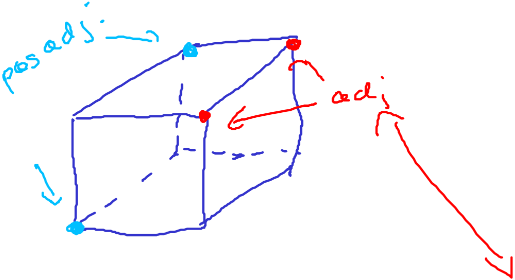
$c := a$



Quiz

$P = \{x \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{0} \leqslant x \leqslant \mathbf{1}\}$

Quelles paires de sommets de P sont adjacentes?



$x_1 \geq 0$

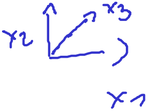
$x_2 \geq 0$

$x_3 \geq 0$

$x_1 \leq 1$

$x_2 \leq 1$

$x_3 \leq 1$



$x_1 \leq 1$

$x_2 \leq 1$

Algorithme du simplexe

George Dantzig (1914 - 2005)

$\binom{m}{n}$ sommets.

Idée fondamentale:

Commencer par le sommet x^*

`while` x^* n'est pas optimal

comment voir ?

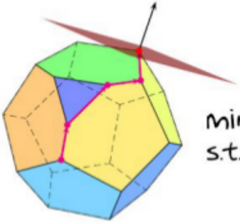
Trouver un sommet x' adjacent à x^* avec $c^T x' > c^T x^*$

Réactualiser $x^* := x'$

ou affirmer que PL n'est pas borné.

La méthode du simplexe

- Bases et dégénérescence
- passer à un meilleur voisin

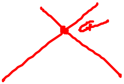


$$\min c^T x$$
$$\text{s.t. } Ax \leq B$$

Bases

Un sous-ensemble $B \subseteq \{1, \dots, m\}$ des indices de lignes avec $|B| = n$ et A_B inversible est appelé une *base (d'indices)* du PL.

Si en plus $A_B^{-1} b_B$ est admissible, B est appelé une *base admissible*.



$A_B^{-1} \cdot b_B$

$x^* \in P$ est sommet

$\Longleftrightarrow \exists B \subseteq \{1, \dots, m\}$ base

tq. $A_B^{-1} b_B = x^*$

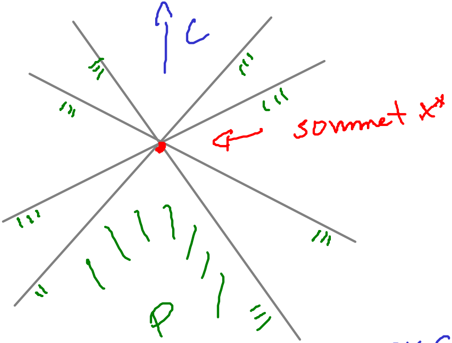
Sommets et bases

f : Bases admissibles $\to$ Sommets

$f(B) = A_B^{-1} \cdot b_B$

Un sommet $x^* \in P$ est représenté par une base B.

Un sommet x^* peut être représenté par plusieurs bases.



nombre de bases représentants x^*

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = 6.$$

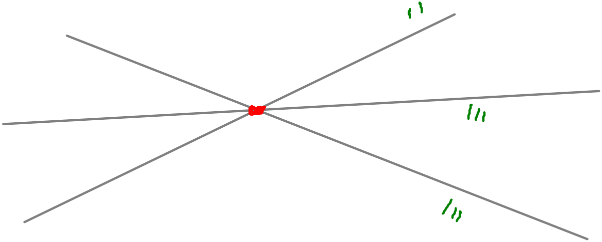
$\max c^T \cdot x$

$Ax \le b, x \in \mathbb{R}^?$

Dégénérescence

Un programme linéaire $\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n, Ax \leqslant b\}$ est *dégénéré* s'il existe $x^* \in \mathbb{R}^n$ de telle manière qu'il y a plus de n contraintes de $Ax \leqslant b$ qui sont actives à x^*.

p. être pas admissible



PL. pas dég. alors f est inversible. inj. surj.

Bases optimales

Une base B est appelée *optimale* si elle est admissible et l'unique $\lambda \in \mathbb{R}^m$ avec

$$\lambda^T A = c^T \quad \text{and } \lambda_i = 0,\ i \notin B$$

satisfait $\lambda \geqslant 0$.

$\lambda \to \lambda_B$

$\quad\to \lambda_{\bar{B}}$

$\lambda_B^T \cdot A_B = c^T \iff \lambda_B^T = c^T A_B^{-1}$

$\lambda^T \cdot A = c^T$

Théorème

Si B est une base optimale, $x^* = A_B^{-1} b_B$ est une solution optimale de PL.

Dém :

$a_1^T \cdot x \leq b_1 \quad (\times \lambda_1)$

$\vdots$

$a_m^T x \leq b_m \quad (\times \lambda_m)$

$+ \Rightarrow \underbrace{\lambda^T \cdot A}_{c^T} x \leq \underbrace{\lambda^T \cdot b}_{c^T \cdot x^*}$ est valide PL.

$\lambda^T \cdot A = c^T$

$\lambda^T \cdot b = \lambda_B^T \cdot b_B = \lambda_B^T \cdot A_B \cdot x^*$

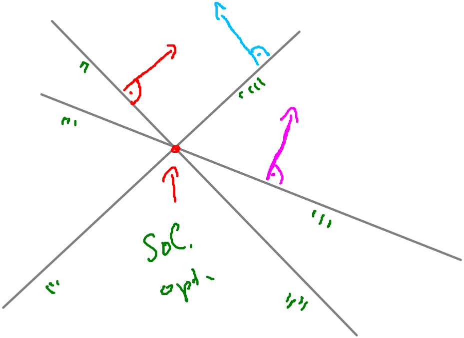
$= \lambda^T \cdot A \cdot x^*$

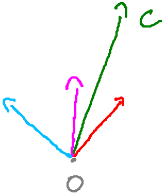
$= c^T \cdot x^*$

Quiz

Quelles bases sont optimales?

base non-optimale





$c^T x$

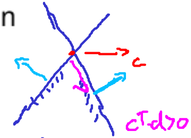
Le cas non-dégénéré

$\max c^T x \quad Ax \le b$ → $A_B x \le b_B$ actives à x^*

→ $A_{\bar{B}} x \le b_{\bar{B}}$ in-active à x^*

Théorème

Supposons que PL est non-dégénéré et B est admissible mais pas une base optimale, alors $x^* = A_B^{-1} b_B$ n'est pas une solution optimale.



$x^T \cdot A = c^T$, $\lambda_j = 0 \ \forall j \notin B$, $\lambda_i < 0$ pour un $i \in B$

$d \in \mathbb{R}^n$: $A_{B \setminus \{i\}} \cdot d = 0$, $a_i^T \cdot d = -1$ (A_B - non-sing)

$$c^T \cdot d = \lambda_B^T \cdot A_B \cdot d = \underbrace{\lambda_i}_{<0} \cdot (-1) > 0$$

$\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $x^* + \varepsilon \cdot d$ est admissible

$$A_B(x^* + \varepsilon \cdot d) \le A_B \cdot x^* + \varepsilon \cdot \underbrace{A_B \cdot d}_{\le 0} \le b_B$$

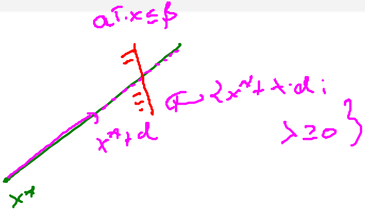
$\Rightarrow c^T \cdot (x^* + \varepsilon \cdot d) > c^T \cdot x^*$ $(\varepsilon > 0)$ x^* n'est pas opt.

Passer à un meilleur voisin

PL. non-dég.

- B n'est pas une base optimale
- $x^* = A_B^{-1} b_B$ correspondant à une solution basique admissible
- $\bar{\lambda}_i < 0$ pour quelque $i \in B$
- $a_j^T \underline{d} = 0\,, j \in B \setminus \{i\}$
  $a_i^T \underline{d} = -1$
- $c^T \underline{d} > 0$
- il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x^* + \varepsilon d$ est admissible

Question: De quelle grandeur ε peut être?



$a^T \cdot d > 0$

$K \subseteq \{1, \dots, m\}$.

$K = \{k : a_k^T \cdot d > 0\}$.

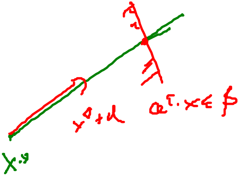
CAS1. $K = \emptyset \Rightarrow$ PL. non-borné

CAS: $K \neq \emptyset$

Passer à un meilleur voisin

- B n'est pas une base optimale
- $x^* = A_B^{-1} b_B$ correspondant à une solution basique admissible
- $\lambda_i < 0$ pour quelque $i \in B$
- $a_j^T d = 0 \, , j \in B \setminus \{i\}$
  $a_i^T d = -1$
- $c^T d > 0$
- il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x^* + \varepsilon d$ est admissible

Question: De quelle grandeur ε peut être?



$$a^T (x^* + \lambda \cdot d) = \beta$$

$$\lambda = \frac{\beta - a^T \cdot x^*}{\underbrace{a^T \cdot d}_{>0}}$$

λ mini: $\min_{k \in K} \frac{b_k - a_k^T \cdot x^*}{a_k^T \cdot d}$ à k^*

Nouvelle Base

$B \setminus \{i\} \cup \{k^*\} = B'$

Passer à un meilleur voisin

- B n'est pas une base optimale
- $x^* = A_B^{-1} b_B$ correspondant à une solution basique admissible
- $\lambda_i < 0$ pour quelque $i \in B$
- $a_j^T d = 0\,, j \in B \setminus \{i\}$
  $a_i^T d = -1$
- $c^T d > 0$
- il existe $\varepsilon > 0$ tel que $x^* + \varepsilon d$ est admissible

Question: De quelle grandeur ε peut être?

λ_{min}: $\min_{k \in K} \dfrac{b_k - a_k^T \cdot x^*}{a_k^T \cdot d}$ à k^*

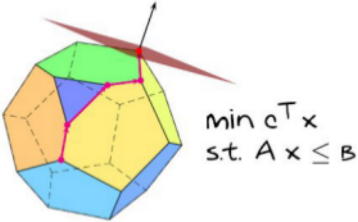
Nouvelle Base $B \setminus \{i\} \cup \{k^*\} = B'$

B' est une base.
Autrement $a_{k^*}^T$ est comb. linéaire des a_j^T $j \in B \setminus \{i\}$
pas possible p.c. $a_j \perp d\,, j \in B \setminus \{i\}$
$a_{k^*}^T \cdot d > 0$ alors $a_{k^*}^T \not\perp d$

B' est base admissible adjacent à B.

La mèthode du simplexe

- L'algorithme du simplexe en notation de base
- Exemple



Récapitulation

Supposition: PL
$\max\{c^T x \colon x \in \mathbb{R}^n, Ax \leqslant b\}$
non-dégénéré

B base actuelle et $\lambda^T \cdot A = c^T$
avec $\lambda_i = 0, i \notin B$

- Si la base actuelle B est optimale,
  $x^* = A_B \cdot b_B$ est *une solution optimale*,
  et on s'arrête
- Si $\lambda_i < 0$, x^* n'est pas optimal
  soit nous pouvons affirmer que PL n'est pas borné,
  soit i *sort* de la base

L'algorithme du simplexe en notation de base

Commencer par une base B admissible

`while` B n'est pas optimale

Soit $i \in B$ l'index avec $\lambda_i < 0$

Calculer $d \in \mathbb{R}^n$ avec $a_j^T d = 0,\ j \in B \setminus \{i\}$ et $a_i^T d = -1$

Déterminer $K = \{k\colon 1 \leqslant k \leqslant m,\ a_k^T d > 0\}$

`if` $K = \emptyset$

affirmer que PL n'est pas borné

`else`

Soit $k \in K$ index où le minimum $\min\limits_{k \in K} (b_k - a_k^T x^*)/a_k^T d$ est atteint

update $B := B \setminus \{i\} \cup \{k\}$

$x^* + \lambda \cdot d$

d

x^*

le cas non-dégénéré

Théorême

Si le programme linéaire est non-dégénéré, l'algorithme du simplexe se termine.

L'ensemble des sommets est fini

et on fait du progrès chaque itération.

Exemple

$\max c^T \cdot x$

$Ax \leq b$

A_B

PL est défini par

$$c = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Base de départ: $B = \{1, 2, 3\}$
- $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$,

  $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
- Valeur d'objectif: 63.0
- $\lambda_B^T = \begin{pmatrix} 36/5 & -4/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

$\lambda_B^T = c^T \cdot A_B^{-1}$

`while` B n'est pas optimal

Soit $i \in B$ l'index avec $\lambda_i < 0$

Calculer $d \in \mathbb{R}^n$ avec $a_j^T d = 0,\ j \in B \setminus \{i\}$ et $a_i^T d$

Determiner $K = \{k\colon 1 \leqslant k \leqslant m,\ a_k^T d > 0\}$

`if` $K = \emptyset$

affirmer que PL n'est pas borné

`else`

Soit $k \in K$ l'index où le minimum $\min_{k \in K}(b_k - a$

update $B := B \setminus \{i\} \cup \{k\}$

- Quel index sort de la base B?

$\boxed{2}$

Exemple

`while` B n'est pas optimal

Soit $i \in B$ l'index avec $\lambda_i < 0$

Calculer $d \in \mathbb{R}^n$ avec $a_j^T d = 0,\ j \in B \setminus \{i\}$ et $a_i^T d$

Determiner $K = \{k\colon 1 \leqslant k \leqslant m,\ a_k^T d > 0\}$

`if` $K = \emptyset$

affirmer que PL n'est pas borné

`else`

Soit $k \in K$ l'index où le minimum $\min_{k \in K}(b_k - a$

update $B := B \setminus \{i\} \cup \{k\}$

PL est défini par

$$c = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Base de départ: $B = \{1, 2, 3\}$
- $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$,

  $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
- Valeur d'objectif: 63.0
- $\lambda_B^T = \begin{pmatrix} 36/5 & -4/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

- *2* sort de B

Exemple

PL est défini par

A_B

$$c = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix} \; A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \; b = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

`while` B n'est pas optimal

  Soit $i \in B$ l'index avec $\lambda_i < 0$

  Calculer $d \in \mathbb{R}^n$ avec $a_j^T d = 0,\ j \in B \setminus \{i\}$ et $a_i^T d$

  Determiner $K = \{k\colon 1 \leqslant k \leqslant m,\ a_k^T d > 0\}$

  `if` $K = \emptyset$

    affirmer que PL n'est pas borné

  `else`

    Soit $k \in K$ l'index où le minimum $\min_{k \in K}(b_k - a$

    update $B := B \setminus \{i\} \cup \{k\}$

- Base de départ: $B = \{1, 2, 3\}$
- $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$,

  $x^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
- Valeur d'objectif: 63.0
- $\lambda_B^T = \begin{pmatrix} 36/5 & -4/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

- *2* sort de B
- $d = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 3/5 \\ -2/5 \end{pmatrix}$, $A_B \cdot d = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $A \cdot d = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 2/5 \\ -3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$ Qu'est ce que K? incr. sans

A_B^{-1} $\begin{pmatrix} | & | & | \end{pmatrix}$

$(*. 1) = d$

$b - Ax^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

séparateur $\boxed{4, 6}$ =

$B = \{1, 6, 3\}$

Exemple

```
while B n'est pas optimal
    Soit i ∈ B l'index avec λ_i < 0
    Calculer d ∈ ℝ^n avec a_j^T d = 0, j ∈ B \ {i} et a_i^T d
    Determiner K = {k: 1 ⩽ k ⩽ m, a_k^T d > 0}
    if K = ∅
        affirmer que PL n'est pas borné
    else
        Soit k ∈ K l'index où le minimum min_{k∈K}(b_k − a
        update B := B \ {i} ∪ {k}
```

PL est défini par

$$c = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Base de départ: $B = \{1, 2, 3\}$
- $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$,

  $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
- Valeur d'objectif: 63.0
- $\lambda_B^T = \begin{pmatrix} 36/5 & -4/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

- 2 sort de B
- $K = \{4, 6\}$
- Quel index entre dans B?

6

Exemple

while B n'est pas optimal

Soit $i \in B$ l'index avec $\lambda_i < 0$

Calculer $d \in \mathbb{R}^n$ avec $a_j^T d = 0,\ j \in B \setminus \{i\}$ et $a_i^T d$

Determiner $K = \{k\colon\ 1 \leqslant k \leqslant m,\ a_k^T d > 0\}$

if $K = \emptyset$

affirmer que PL n'est pas borné

else

Soit $k \in K$ l'index où le minimum $\min_{k \in K}(b_k - a$

update $B := B \setminus \{i\} \cup \{k\}$

PL est défini par

$$c = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Base de départ: $B = \{1, 2, 3\}$
- $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$,

  $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
- Valeur d'objectif: 63.0
- $\lambda_B^T = \begin{pmatrix} 36/5 & -4/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

- *2* sort de B
- $K = \{4, 6\}$
- *6* entre dans B

Exemple

`while` B n'est pas optimal

Soit $i \in B$ l'index avec $\lambda_i < 0$

Calculer $d \in \mathbb{R}^n$ avec $a_j^T d = 0,\ j \in B \setminus \{i\}$ et $a_i^T d$

Determiner $K = \{k \colon 1 \leqslant k \leqslant m,\ a_k^T d > 0\}$

`if` $K = \emptyset$

affirmer que PL n'est pas borné

`else`

Soit $k \in K$ l'index où le minimum $\min\limits_{k \in K}(b_k - a$

update $B := B \setminus \{i\} \cup \{k\}$

PL est défini par

$$c = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Base de départ: $B = \{1, 2, 3\}$
- $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$,
  $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
- Valeur d'objectif: 63.0
- $\lambda_B^T = \begin{pmatrix} 36/5 & -4/5 & 1/5 \end{pmatrix}$

- *2* sort de B
- $K = \{4, 6\}$
- *6* entre dans B
- *Nouvelle base*: $B = \{1, 6, 3\}$

Exemple (cont.)

`while` B n'est pas optimal
  Soit $i \in B$ l'index avec $\lambda_i < 0$
  Calculer $d \in \mathbb{R}^n$ avec $a_j^T d = 0,\ j \in B \setminus \{i\}$ et $a_i^T d$
  Déterminer $K = \{k\colon 1 \leqslant k \leqslant m,\ a_k^T d > 0\}$
  `if` $K = \emptyset$
    affirmer que PL n'est pas borné
  `else`
    Soit $k \in K$ l'index où $\min_{k \in K}(b_k - a_k^T x^*)/a_k^T d$ es
    update $B := B \setminus \{i\} \cup \{k\}$

PL est défini par

$$c = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Base actuelle: $B = \{1, 6, 3\}$
- $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ b_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$

  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 9/2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Valeur de l'objectif: 69.0
- $\lambda_B^T = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

- Quel index part de B?

Exemple (cont.)

PL est défini par

$$c = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Base actuelle: $B = \{1, 6, 3\}$
- $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ b_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$

  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 9/2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Valeur de l'objectif: 69.0
- $\lambda_B^T = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

`while` B n'est pas optimal

Soit $i \in B$ l'index avec $\lambda_i < 0$

Calculer $d \in \mathbb{R}^n$ avec $a_j^T d = 0, \ j \in B \setminus \{i\}$ et $a_i^T d$

Déterminer $K = \{k\colon 1 \leqslant k \leqslant m, \ a_k^T d > 0\}$

`if` $K = \emptyset$

affirmer que PL n'est pas borné

`else`

Soit $k \in K$ l'index où $\min\limits_{k \in K}(b_k - a_k^T x^*)/a_k^T d$ es

update $B := B \setminus \{i\} \cup \{k\}$

- *3* part de B

Exemple (cont.)

`while` B n'est pas optimal

Soit $i \in B$ l'index avec $\lambda_i < 0$

Calculer $d \in \mathbb{R}^n$ avec $a_j^T d = 0,\ j \in B \setminus \{i\}$ et $a_i^T d$

Déterminer $K = \{k\colon 1 \leqslant k \leqslant m,\ a_k^T d > 0\}$

`if` $K = \emptyset$

affirmer que PL n'est pas borné

`else`

Soit $k \in K$ l'index où $\min_{k \in K} (b_k - a_k^T x^*)/a_k^T d$ es

update $B := B \setminus \{i\} \cup \{k\}$

PL est défini par

$$c = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Base actuelle: $B = \{1, 6, 3\}$
- $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$

  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 9/2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Valeur de l'objectif: 69.0
- $\lambda_B^T = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

- *3* part de B
- $d = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, A_B \cdot d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, A \cdot d = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ -1 \\ 1 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Qu'est ce que K? incr. sans séparateur

Exemple (cont.)

PL est défini par

$$c = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
while B n'est pas optimal
    Soit i ∈ B l'index avec λ_i < 0
    Calculer d ∈ ℝ^n avec a_j^T d = 0, j ∈ B \ {i} et a_i^T d
    Déterminer K = {k: 1 ⩽ k ⩽ m, a_k^T d > 0}
    if K = ∅
        affirmer que PL n'est pas borné
    else
        Soit k ∈ K l'index où min_{k∈K}(b_k − a_k^T x*)/a_k^T d es
        update B := B \ {i} ∪ {k}
```

- Base actuelle: $B = \{1, 6, 3\}$
- $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $b_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$

  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 9/2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Valeur de l'objectif: 69.0
- $\lambda_B^T = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

- *3* part de B
- $K = \{4\}$
- Quel index entre dans B?

Exemple (cont.)

PL est défini par

$$c = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

`while` B n'est pas optimal

Soit $i \in B$ l'index avec $\lambda_i < 0$

Calculer $d \in \mathbb{R}^n$ avec $a_j^T d = 0,\ j \in B \setminus \{i\}$ et $a_i^T d$

Déterminer $K = \{k\colon 1 \leqslant k \leqslant m,\ a_k^T d > 0\}$

`if` $K = \emptyset$

affirmer que PL n'est pas borné

`else`

Soit $k \in K$ l'index où $\min_{k \in K} (b_k - a_k^T x^*)/a_k^T d$ es

update $B := B \setminus \{i\} \cup \{k\}$

- Base actuelle: $B = \{1, 6, 3\}$
- $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ b_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$

  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 9/2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Valeur de l'objectif: 69.0
- $\lambda_B^T = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

- *3* part de B
- $K = \{4\}$
- *4* entre dans B

Exemple (cont.)

```
while B n'est pas optimal
    Soit i ∈ B l'index avec λ_i < 0
    Calculer d ∈ ℝ^n avec a_j^T d = 0, j ∈ B \ {i} et a_i^T d
    Déterminer K = {k: 1 ⩽ k ⩽ m, a_k^T d > 0}
    if K = ∅
        affirmer que PL n'est pas borné
    else
        Soit k ∈ K l'index où min_{k∈K}(b_k − a_k^T x*)/a_k^T d es
        update B := B \ {i} ∪ {k}
```

PL est défini par

$$c = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Base actuelle: $B = \{1, 6, 3\}$
- $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ b_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$

  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 9/2 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Valeur de l'objectif: 69.0
- $\lambda_B^T = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

- *3* part de B
- $K = \{4\}$
- *4* entre dans B
- *Base nouvelle*: $B = \{1, 6, 4\}$

Exemple (cont.)

PL est défini par

$$c = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} b = \begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

`while` B n'est pas optimal

    Soit $i \in B$ l'index avec $\lambda_i < 0$
    Calculer $d \in \mathbb{R}^n$ with $a_j^T d = 0$, $j \in B \setminus \{i\}$ et $a_i^T d$
    Déterminer $K = \{k\colon 1 \leqslant k \leqslant m,\ a_k^T d > 0\}$
    `if` $K = \emptyset$
        affirmer que PL n'est pas borné
    `else`
        Soit $k \in K$ l'index où $\min_{k \in K} (b_k - a_k^T x^*)/a_k^T d$ es
        update $B := B \setminus \{i\} \cup \{k\}$

- Base actuelle: $B = \{1, 6, 4\}$
- $A_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

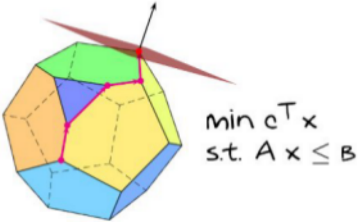
  $b_B = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

  Valeur de l'objectif: 70.0
- $\lambda_B^T = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

- $B = \{1, 6, 4\}$ est une *base optimale*
- $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une solution optimale

La méthode du simplexe

- Le cas dégénéré
- Eviter le cyclage: la règle du pivot de Bland



L'algorithme du simplexe: la règle de Bland (Bland 1977)

L.P. dégénéré

$B, B', B'', \dots$

$\tilde{B}$

Commencer par une base admissible B

`while` B n'est pas optimal

Soit $i \in B$ est *le plus petit* index avec $\lambda_i < 0$

Calculer $d \in \mathbb{R}^n$ avec $a_j^T d = 0,\ j \in B \setminus \{i\}$ et $a_i^T d = -1$

Déterminer $K = \{k\colon 1 \leqslant k \leqslant m,\ a_k^T d > 0\}$

`if` $K = \emptyset$

affirmer que PL n'est pas borné

`else`

Soit $k \in K$ est *le plus petit* index où $\min\limits_{k \in K}(b_k - a_k^T x^*)/a_k^T d$ est atte

update $B := B \setminus \{i\} \cup \{k\}$

Théorème

Si la règle de Bland est appliquée, l'algorithme du simplexe se termine.

Demonstration: Suppose qu'une base est répétée

Soit j l'index le plus grand qui entre / sort

$B_0 \setminus \{u\} \cup \{v\}$

$\underbrace{B_0, B_1, B_2, \dots \dots , B_{k-1}, B_k}_{=}$

$B_p \quad B_q$

$0 \leq p < k$

$0 \leq q < k$

$$\underbrace{\lambda^{(p)^T} A = c^T, \quad c^T \cdot d^{(q)} > 0}$$

$$\Rightarrow \lambda^{(p)^T} \cdot A \cdot d^{(q)} > 0$$

$$\Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, m\} \quad \lambda_i^{(p)} \cdot a_i^T \cdot d^{(q)} > 0$$

Eviter le cyclage selon la règle de Bland

$\underbrace{\lambda_i^{(q)}}_{\neq 0} \cdot a_i^T \cdot d^{(q)} > 0 \implies i \in B^{(p)}$

$\uparrow j$ $\quad \downarrow j$

$B_p \quad B_q$

CAS1 : $i > j$ $\quad i \in B_q$, $a_i^T \cdot d^{(q)} = 0$

$\Downarrow$

$a_i^T \cdot x \leq b_i$

active au sommet pendant tous les itérations.

CAS2 : $i < j$ $\quad \lambda_i^{(p)} \geq 0$, $a_i^T \cdot d^{(q)} > 0$?

$i \in K$ pas possible

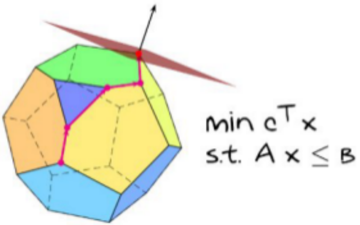
CAS3 : $i = j$

$\lambda_i^{(p)} < 0$, $a_i^T \cdot d^{(q)} > 0$

$\Downarrow$

La méthode du simplexe

- Trouver un sommet initial
- Assembler avec:
  Résoudre un programme linéaire avec l'algorithme du simplexe



Trouver un sommet initial: Phase 1

Résoudre un programme linéaire avec le simplexe

- Soit $\max\{c^T x : x \in \mathbb{R}^n,\ Ax \leqslant b\}$
- Ré-Ecrire $\max\{c^T(y - z) : y, z \in \mathbb{R}^n, A(y - z) \leqslant b,\ y, z \geqslant 0\}$
- Trouver le sommet initial ou affirmer que le PL est inadmissible (Phase 1)
- Résoudre le PL avec la méthode du simplexe utilisant le sommet initial (Phase 2)
  Résultat: Solution optimale ou affirmation que le PL n'est pas borné