

## Programmation linéaire et systèmes d'équations linéaires

# CM 2

## Systèmes linéaires

et lien avec la programmation linéaire

Cours *Optimisation Discrète* 3 mars 2011

Friedrich Eisenbrand  
EPFL

### Trouver une solution du système

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, i = 1, \dots, m$$

avec des nombres  $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ ,  
 $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$  donnés.

En notation matricielle :

$$A \cdot x = b$$

### Modélisé comme programme linéaire

$$\begin{aligned} & \max \mathbf{0}^T x \\ & Ax = b \end{aligned}$$

Sous la forme standard avec inégalités :

$$\begin{aligned} & \max \mathbf{0}^T x \\ & Ax \leq b \\ & -Ax \leq -b \end{aligned}$$

### Conséquence

La programmation linéaire est au moins aussi générale que le problème de résoudre un système d'équations linéaires !

Notes

Notes

## Systèmes d'équations linéaires

### Un système simple

$$\begin{array}{rclcl} 0x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 = 12 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 4x_4 = 8 \end{array}$$

Une solution :  $x^* = (0, 3, 0, 2)^T$

L'ensemble des solutions :

$$\left\{ x^* + \begin{pmatrix} y_1 \\ -2y_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} : y_1, y_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x^* + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot y : y \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

## Solutions et noyau

### Définition (noyau)

Le *noyau* d'une matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est l'ensemble

$$\text{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$$

- ▶  $\text{Ker}(A)$  est un *sous-espace* de  $\mathbb{R}^n$
- ▶ Pour  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $b \in \mathbb{R}^m$ , le système  $Ax = b$  admet une solution si et seulement s'il existe un élément  $x^* \in \text{Ker}([A \mid b])$  avec  $x_{n+1}^* \neq 0$

### Théorème

Soit  $Ax = b$  un système d'équations linéaires, où  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ , et  $x^*$  tel que  $Ax^* = b$ .

L'ensemble  $S$  de toutes les solutions de  $Ax = b$  est donc

$$S = \{x^* + y : y \in \text{Ker}(A)\}$$

## Notes

## Notes

## Forme échelonnée en lignes

### Définition (Forme échelonnée en lignes)

Une matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  non-nulle est sous la *forme échelonnée en lignes*, si :

- ▶ il existe un entier  $r$ ,  $1 \leq r \leq m$  tel que les  $r$  premières lignes de  $A$  sont non-nulles et les lignes  $r+1, \dots, m$  de  $A$  sont nulles.
- ▶ Soit  $j(i) = \min\{j \in \{1, \dots, n\} : a_{ij} \neq 0\}$ , ainsi  $j(1) < j(2) < \dots < j(r)$ .

### Exemple de forme échelonnée en lignes ou non

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Solution et noyau de $A$ sous la forme échelonnée en lignes

### Définition (Forme échelonnée réduite en lignes)

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  est sous la forme échelonnée réduite en lignes, si elle est échelonnée en lignes et

- ▶  $a_{ij(i)} = 1$  pour  $i = 1, \dots, r$  et
- ▶  $a_{\ell j(i)} = 0$  pour  $i = 1, \dots, r$  et  $1 \leq \ell < i$ .

### Lemme

Soit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  sous la forme échelonnée réduite en lignes,  $b \in \mathbb{R}^m$  et soit  $r$  de la définition de la forme échelonnée réduite en lignes.

Le système  $Ax = b$  admet une solution si et seulement si  $b_\mu = 0$  pour chaque  $\mu \in \{r+1, \dots, m\}$ .

Dans ce cas,  $x^*$  avec  $x_j^* = 0$  pour  $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j(1), \dots, j(r)\}$  et  $x_{j(i)}^* = b_i$  pour  $i = 1, \dots, r$  est une solution.

## Solution et noyau de $A$ sous la forme échelonnée en lignes

### La forme échelonnée en lignes et la forme échelonnée réduite en lignes

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & \frac{9}{2} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### Exercice de 3 minutes

Déterminer le noyau des matrices ci-dessus.

### Théorème

Soit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  sous la forme échelonnée réduite en lignes. Le noyau de  $A$  est le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  engendré par les vecteurs  $y^j$ ,  $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j(1), \dots, j(k)\}$  où  $y^j$  vaut zéro partout sauf aux positions suivantes :

$$y_j^j = 1 \text{ et } y_{j(i)}^j = -a_{ij} \text{ pour } j(i) < j.$$

## Opérations élémentaires sur les lignes

### Théorème

L'ensemble des solutions de

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots &\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a'_{11}x_1 + \cdots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ a'_{21}x_1 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ \cdots &\cdots \\ a'_{m1}x_1 + \cdots + a'_{mn}x_n &= b'_m \end{aligned}$$

est le même si on obtient  $A'x = b'$  à partir de  $Ax = b$  par l'une des opérations élémentaires suivantes

- ▶ L'échange de la  $i^{\text{ème}}$  équation avec la  $j^{\text{ème}}$  équation
- ▶ Multiplication de la  $i^{\text{ème}}$  équation par  $\mu \neq 0$
- ▶ L'addition de  $\mu$  fois la  $j^{\text{ème}}$  équation à la  $i^{\text{ème}}$  équation

### Notes

### Notes

## Élimination de Gauss-Jordan

Principe général :

Comme les équations  $Ax = b$  avec  $A$  sous la forme échelonnée réduite en lignes sont faciles à résoudre, appliquer des opérations élémentaires sur les lignes à  $Ax = b$  successivement jusqu'à arriver au système équivalent  $A'x = b'$ , où  $A'$  est sous la forme échelonnée en lignes.

Appliquer des opérations élémentaires sur les lignes à  $[A \mid b]$  pour obtenir une matrice  $[A' \mid b']$  sous la forme échelonnée réduite en lignes.

### Exemple

On utilise le système de calcul formel (SAGE) pour trouver l'ensemble des solutions du système

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & - & 7x_4 & = & 2 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & - & 5x_3 & - & 6x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & 2 \end{pmatrix}$$

## Élimination de Gauss-Jordan

Pseudo-code : forme échelonnée réduite en lignes

```
k := 1
pour j = 1, ..., n
    i = k
    tant que i ≤ m et aij = 0
        i := i + 1   chercher le pivot
    si i ≤ m
        échanger lignes i et k
        multiplier ligne k par 1/ak,j le pivot devient 1
        pour i = k + 1, ..., m
            ajouter -aij fois la ligne k à la ligne i
            obtenir des 0 au dessous
        pour i = 1, ..., k - 1
            ajouter -aij fois la ligne k à la ligne i
            obtenir des 0 au dessus
        k := k + 1
```

Notes

30

Notes

31

## Élimination de Gauss-Jordan

mise en œuvre (Python/SAGE)

```
def gauss(A):
    k = 1
    for j in range(1, A.ncols() + 1):
        i=k
        while(i <= A.nrows() and A[i-1,j-1] == 0):
            i = i+1
        if (i <= A.nrows()):
            A.swap_rows(k-1,i-1)
            A.rescale_row(k-1, 1/A[k-1,j-1])
        for i in range(k+1,A.nrows() + 1):
            A.add_multiple_of_row(i-1,k-1,-A[i-1,j-1])
        for i in range(1,k):
            A.add_multiple_of_row(i-1,k-1,-A[i-1,j-1])
    k = k+1
```

## Opérations élémentaires sur les lignes et multiplication matricielle

### Échange des lignes $i$ et $j$

Si on obtient  $A' \in \mathbb{R}^{m \times n}$  à partir de  $A$  par l'échange des lignes  $i$  et  $j$  pour  $1 \leq i < j \leq m$ , on a  $A' = U \cdot A$ , où  $U$  est la matrice identité de taille  $m \times m$  dans laquelle on a échangé les lignes  $i$  et  $j$ .

### Exercice de 5 minutes

Expliquer les opérations élémentaires sur les lignes appliquées à  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- ▶ Multiplication de la  $i^{\text{ème}}$  équation par  $\mu \neq 0$
- ▶ L'addition de  $\mu$  fois la  $j^{\text{ème}}$  équation à la  $i^{\text{ème}}$  équation comme multiplication de  $A$  à gauche par une matrice appropriée.

Notes

Notes

## Élimination de Gauss-Jordan et multiplication matricielle

### Lemme

Soit  $A' \in \mathbb{R}^{m \times n}$  le résultat de l'application à  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  d'un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes. Alors, il existe une matrice  $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$  avec  $\det(U) \neq 0$  telle que  $A' = U \cdot A$ .

### Lemme

Soit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . L'élimination de Gauss-Jordan calcule une matrice  $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$  inversible et une matrice  $A' \in \mathbb{R}^{m \times n}$  sous la forme échelonnée en lignes tel que

$$U \cdot A = A'.$$

Notes

## Élimination de Gauss-Jordan et matrice de transvection

mise en œuvre (Python/SAGE)

```
def gauss2(A):
    U = matrix(QQ,A.nrows(),A.nrows())
    for i in range(A.nrows()):
        U[i,i]=1

    k = 1
    for j in range(1, A.ncols()+1):
        i=k
        while(i <= A.nrows() and A[i-1,j-1] == 0):
            i = i+1
        if (i <= A.nrows() ):
            U.swap_rows(k-1,i-1)
            A.swap_rows(k-1,i-1)
            U.rescale_row(k-1, 1/A[k-1,j-1])
            A.rescale_row(k-1, 1/A[k-1,j-1])

        for i in range(k+1,A.nrows()+1):
            U.add_multiple_of_row(i-1,k-1,-A[i-1,j-1])
            A.add_multiple_of_row(i-1,k-1,-A[i-1,j-1])

        k = k+1

    return U
```

34

35

Notes

## Démontrer la non-existence de solutions

### Lemme

Soit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et  $b \in \mathbb{R}^m$ . Le système  $Ax = b$  n'admet pas de solutions si et seulement s'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}^m$  avec  $\lambda^T A = 0$  et  $\lambda^T b \neq 0$ .