CM 2

Systèmes linéaires

et lien avec la programmation linéaire

Cours *Optimisation Discrète* 3 mars 2011

Friedrich Eisenbrand
EPFL

Programmation linéaire et systèmes d'équations linéaires

Trouver une solution du système

$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i, \; i = 1, \ldots, m$

avec des nombres $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$,
$i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots n$ donnés.

En notation matricielle :

$$A \cdot x = b$$

Modélisé comme programme linéaire

$$\begin{aligned} \max \mathbf{0}^T x \\ Ax = b \end{aligned}$$

Sous la forme standard avec inégalités :

$$\begin{aligned} \max \mathbf{0}^T x \\ Ax \leq b \\ -Ax \leq -b \end{aligned}$$

Conséquence

La programmation linéaire est au moins aussi générale que le problème de résoudre un système d'équations linéaires !

Systèmes d'équations linéaires

Un système simple

$$\begin{array}{ccccccccc} 0x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & = & 12 \\ 0x_1 & + & 0x_2 & + & 0x_3 & + & 4x_4 & = & 8 \end{array}$$

Une solution : $x^* = (0, 3, 0, 2)^T$

L'ensemble des solutions :

$$\left\{ x^* + \begin{pmatrix} y_1 \\ -2y_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} : y_1, y_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x^* + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot y : y \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Solutions et noyau

Définition (noyau)

Le *noyau* d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est l'ensemble

$$\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$$

- $\mathrm{Ker}(A)$ est un *sous-espace* de $\mathbb{R}^n$
- Pour $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$, le système $Ax = b$ admet une solution si et seulement s'il existe un élément $x^* \in \mathrm{Ker}([A \mid b])$ avec $x^*_{n+1} \neq 0$

Théorème

Soit $Ax = b$ un système d'équations linéaires, où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, et x^* tel que $Ax^* = b$.
L'ensemble S de toutes les solutions de $Ax = b$ est donc

$$S = \{x^* + y : y \in \mathrm{Ker}(A)\}$$

Forme échelonnée en lignes

Définition (Forme échelonnée en lignes)

Une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ non-nulle est sous la *forme échelonnée en lignes*, si :

- il existe un entier $r, 1 \leq r \leq m$ tel que les r premières lignes de A sont non-nulles et les lignes $r+1, \ldots, m$ de A sont nulles.
- Soit $j(i) = \min\{j \in \{1, \ldots, n\} \colon a_{ij} \neq 0\}$, ainsi $j(1) < j(2) < \cdots < j(r)$.

Exemple de forme échelonnée en lignes ou non

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution et noyau de A sous la forme échelonnée en lignes

Définition (Forme échelonnée réduite en lignes)

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ est sous la forme échelonnée *réduite* en lignes, si elle est échelonnée en lignes et

- $a_{ij(i)} = 1$ pour $i = 1,\dots r$ et
- $a_{\ell j(i)} = 0$ pour $i = 1,\dots,r$ et $1 \leq \ell < i$.

Lemme

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sous la forme échelonnée réduite en lignes, $b \in \mathbb{R}^m$ et soit r de la définition de la forme échelonnée réduite en lignes.
Le système $Ax = b$ admet une solution si et seulement si $b_\mu = 0$ pour chaque $\mu \in \{r+1,\dots,m\}$.
Dans ce cas, x^* avec $x_j^* = 0$ pour $j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j(1),\dots,j(r)\}$ et $x_{j(i)}^* = b_i$ pour $i = 1,\dots,r$ est une solution.

Solution et noyau de A sous la forme échelonnée en lignes

La forme échelonnée en lignes et la forme échelonnée réduite en lignes

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & \frac{9}{2} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice de 3 minutes

Déterminer le noyau des matrices ci-dessus.

Théorème

Soit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sous la forme échelonnée réduite en lignes. Le noyau de A est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ engendré par les vecteurs y^j, $j \in \{1,\dots,n\} \setminus \{j(1),\dots,j(k)\}$ où y^j vaut zéro partout sauf aux positions suivantes :

$$y^j_j = 1 \text{ et } y^j_{j(i)} = -a_{ij} \text{ pour } j(i) < j.$$

Opérations élémentaires sur les lignes

Théorème

L'ensemble des solutions de

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & & \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccc} a'_{11}x_1 & + & \cdots & + & a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\ a'_{21}x_1 & + & \cdots & + & a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\ & & \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} & & \\ a'_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a'_{mn}x_n & = & b'_m \end{array}$$

est le même si on obtient $A'x = b'$ à partir de $Ax = b$ par l'une des opérations élémentaires suivantes

- *L'échange de la $i^{\text{ème}}$ équation avec la $j^{\text{ème}}$ équation*
- *Multiplication de la $i^{\text{ème}}$ équation par $\mu \neq 0$*
- *L'addition de μ fois la $j^{\text{ème}}$ équation à la $i^{\text{ème}}$ équation*

Élimination de Gauss-Jordan

Principe général :

Comme les équations $Ax = b$ avec A sous la forme échelonnée réduite en lignes sont faciles à résoudre, appliquer des opérations élémentaires sur les lignes à $Ax = b$ successivement jusqu'à arriver au système équivalent $A'x = b'$, où A' est sous la forme échelonnée en lignes.

Appliquer des opérations élémentaires sur les lignes à $[A \mid b]$ pour obtenir une matrice $[A' \mid b']$ sous la forme échelonnée réduite en lignes.

Exemple

On utilise le système de calcul formel (SAGE) pour trouver l'ensemble des solutions du système

$$\left(\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 7x_3 & - & 7x_4 & = & 2 \\ -3x_1 & + & 4x_2 & - & 5x_3 & - & 6x_4 & = & 3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & 2 \end{array}\right)$$

Élimination de Gauss-Jordan

Pseudo-code : forme échelonnée réduite en lignes

$k := 1$
pour $j = 1, \ldots, n$
    $i = k$
    tant que $i \leq m$ et $a_{ij} = 0$
        $i := i + 1$ *chercher le pivot*
    si $i \leq m$
        échanger lignes i et k
        multiplier ligne k par $1/a_{k,j}$ *le pivot devient* 1
        pour $i = k + 1, \ldots, m$
            ajouter $-a_{ij}$ fois la ligne k à la ligne i
                obtenir des 0 *au dessous*
        pour $i = 1, \ldots, k - 1$
            ajouter $-a_{ij}$ fois la ligne k à la ligne i
                obtenir des 0 *au dessus*
        $k := k + 1$

Élimination de Gauss-Jordan

mise en œuvre (Python/SAGE)

```
def gauss(A):
    k = 1
    for j in range(1, A.ncols()+1):
        i=k
        while(i <= A.nrows() and A[i-1,j-1] == 0):
            i = i+1
        if (i <= A.nrows() ):
            A.swap_rows(k-1,i-1)
            A.rescale_row(k-1, 1/A[k-1,j-1])

            for i in range(k+1,A.nrows()+1):
                A.add_multiple_of_row(i-1,k-1,-A[i-1,j-1])

            for i in range(1,k):
                A.add_multiple_of_row(i-1,k-1,-A[i-1,j-1])

            k = k+1
```

Opérations élémentaires sur les lignes et multiplication matricielle

Échange des lignes i et j

Si on obtient $A' \in \mathbb{R}^{m \times n}$ à partir de A par l'échange des lignes i et j pour $1 \leq i < j \leq m$, on a $A' = U \cdot A$, où U est la matrice identité de taille $m \times m$ dans laquelle on a échangé les lignes i et j.

Exercice de 5 minutes

Expliquer les opérations élémentaires sur les lignes appliquées à $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

- Multiplication de la $i^{\text{ème}}$ équation par $\mu \neq 0$
- L'addition de μ fois la $j^{\text{ème}}$ équation à la $i^{\text{ème}}$ équation

comme multiplication de A à gauche par une matrice appropriée.

Élimination de Gauss-Jordan et multiplication matricielle

Lemme

Soit $A' \in \mathbb{R}^{m \times n}$ le résultat de l'application à $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ d'un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes. Alors, il existe une matrice $U \in \mathbb{R}^{m \times n}$ avec $\det(U) \neq 0$ telle que $A' = U \cdot A$.

Lemme

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. L'élimination de Gauss-Jordan calcule une matrice $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ inversible et une matrice $A' \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sous la forme échelonnée en lignes tel que

$$U \cdot A = A'.$$

Élimination de Gauss-Jordan et matrice de transvection

mise en œuvre (Python/SAGE)

```
def gauss2(A):
    U = matrix(QQ,A.nrows(),A.nrows())
    for i in range(A.nrows()):
        U[i,i]=1

    k = 1
    for j in range(1, A.ncols()+1):
        i=k
        while(i <= A.nrows() and A[i-1,j-1] == 0):
            i = i+1
        if (i <= A.nrows() ):
            U.swap_rows(k-1,i-1)
            A.swap_rows(k-1,i-1)
            U.rescale_row(k-1, 1/A[k-1,j-1])
            A.rescale_row(k-1, 1/A[k-1,j-1])

            for i in range(k+1,A.nrows()+1):
                U.add_multiple_of_row(i-1,k-1,-A[i-1,j-1])
                A.add_multiple_of_row(i-1,k-1,-A[i-1,j-1])

            for i in range(1,k):
                U.add_multiple_of_row(i-1,k-1,-A[i-1,j-1])
                A.add_multiple_of_row(i-1,k-1,-A[i-1,j-1])

            k = k+1

    return U
```

Démontrer la non-existence de solutions

Lemme

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Le système $Ax = b$ n'admet pas de solutions si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^m$ avec $\lambda^T A = 0$ et $\lambda^T b \neq 0$.