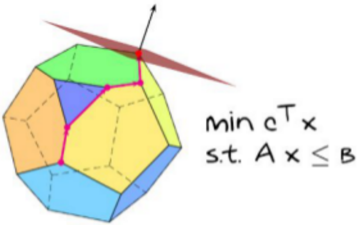
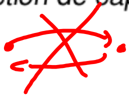
Flots

- Réseaux et Flots



Réseaux et flots

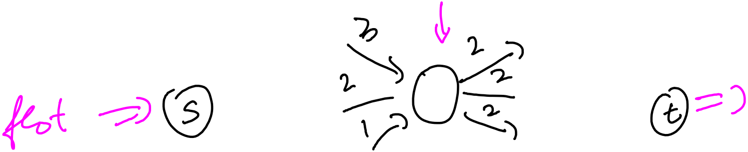
Réseau: Graphe orienté simple $D = (V, A)$ et *fonction de capacité* $u : A \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$.



$f : A \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ est appelée *flot de s à t*, si

$$\sum_{e \in \delta^{out}(v)} f(e) = \sum_{e \in \delta^{in}(v)} f(e), \text{ pour tout } v \in V - \{s, t\}, \qquad (1)$$

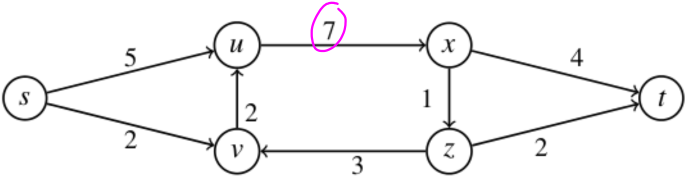
où $s, t \in V$. Le flot est *admissible*, si $f(e) \leqslant u(e)$ pour tout $e \in A$.



Réseaux et flots

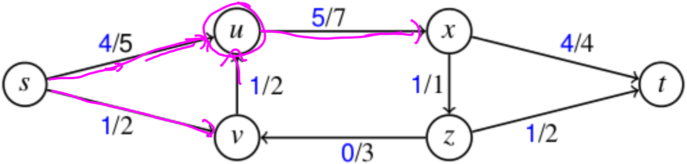
capacités

Exemple



Réseaux et flots

Exemple : Réseau et flot de s à t

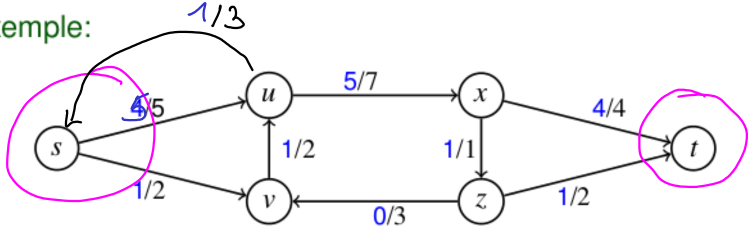


Valeur du flot

La *valeur* de f est définie comme
$value(f) = \sum_{e \in \delta^{out}(s)} f(e) - \sum_{e \in \delta^{in}(s)} f(e)$.

Le *problème du flot maximal de s à t* consiste à déterminer un flot valeur maximal de s à t qui est admissible.

Exemple:



Valeur = 5

Un PL pour les flots maximaux

$\delta^{out}(v)$ $\delta^{in}(v)$ $\delta^{out}(s)$ $\delta^{in}(s)$

$x(e)$ VARIABLE

e

$$
\begin{aligned}
\max \sum_{e\in\delta^{out}(s)} x(e) \;&-\; \sum_{e\in\delta^{in}(s)} x(e) \\
\sum_{e\in\delta^{out}(v)} x(e) \;&=\; \sum_{e\in\delta^{in}(v)} x(e), \quad \text{pour tout } v \in V-\{s,t\} \\
x(e) \;&\leqslant\; u(e), \quad \text{pour tout } e \in A \\
x(e) \;&\geqslant\; 0, \quad \text{pour tout } e \in A
\end{aligned}
$$

Capacités sont respectés

Remarque

Si le PL est borné et les capacités sont des nombres entiers, le PL a une solution optimale intégrale, lorsque la *matrice d'incidence sommets-arcs d'un graphe orienté* est totalement unimodulaire.

Un PL pour les flots maximaux

arrêtes sortant

$v \quad \boxed{1 \qquad -1}$

↳ arrêtes entrant.

$|A|$

$|V|-2 \left\{ B x = 0 \right.$

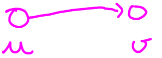
$$\begin{array}{c} e \\ \left[\begin{array}{c} 1 \\ -1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \leftarrow u \\ \leftarrow v \end{array}$$

$$\max \sum_{e \in \delta^{out}(s)} x(e) - \sum_{e \in \delta^{in}(s)} x(e)$$

$$\boxed{\sum_{e \in \delta^{out}(v)} x(e) = \sum_{e \in \delta^{in}(v)} x(e), \text{ pour tout } v \in V - \{s, t\}}$$

$$x(e) \leqslant u(e), \text{ pour tout } e \in A$$

$$x(e) \geqslant 0, \text{ pour tout } e \in A$$



Remarque

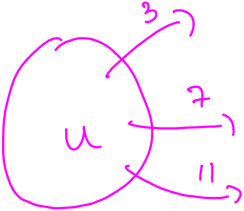
Si le PL est borné et les capacités sont des nombres entiers, le PL a une solution optimale intégrale, lorsque la *matrice d'incidence sommets-arcs d'un graphe orienté* est totalement unimodulaire.

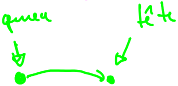
Coupes

Pour $U \subseteq V$, $\delta^{in}(U)$ dénote les arcs qui entrent dans U et $\delta^{out}(U)$ dénote les arcs sortant de U.
Des ensembles d'arcs de la forme $\delta^{out}(U)$ sont appelés une *coupe* de D. $= (V, A)$

$u : A \to \mathbb{R}_+$

La *capacité d'une coupe* $u(\delta^{out}(U))$ est la somme des capacités de ses arcs.





$u(\delta^{out}(U)) = 21$

Coupes

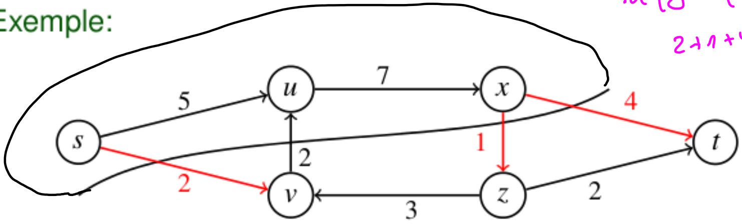
Pour $U \subseteq V$, $\delta^{in}(U)$ dénote les arcs qui entrent dans U et $\delta^{out}(U)$ dénote les arcs sortant de U.
Des ensembles d'arcs de la forme $\delta^{out}(U)$ sont appelés une *coupe* de D.

Si $s \in U$ et $t \notin U$, $\delta^{out}(U)$ est une coupe s-t

La *capacité d'une coupe* $u(\delta^{out}(U))$ est la somme des capacités de ses arcs.

$u(\delta^{out}(U)) =$
$2+1+4 = 7$

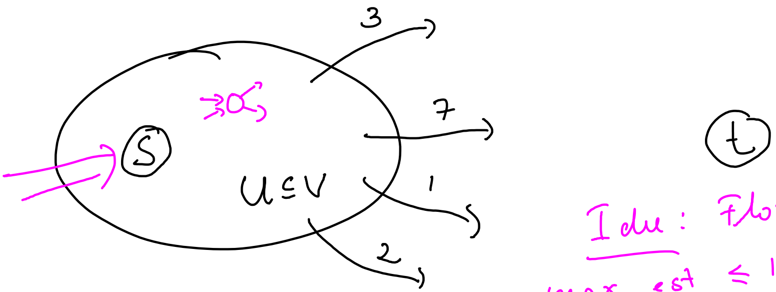
Exemple:



Fonction d'excès

Pour tout $f : A \to \mathbb{R}$, *la fonction d'excès*; $exces_f : 2^V \to \mathbb{R}$ est définie par

$$exces_f(U) = \sum_{e \in \delta^{in}(U)} f(e) - \sum_{e \in \delta^{out}(U)} f(e).$$



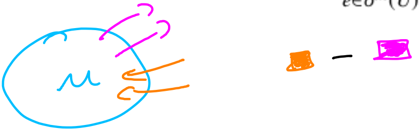
Idée : Flot max. est ≤ 13

But : Confirmer notre intuition.

Fonction d'excès

Pour tout $f : A \to \mathbb{R}$, *la fonction d'excès*; $exces_f : 2^V \to \mathbb{R}$ est définie par

$$exces_f(U) = \sum_{e \in \delta^{in}(U)} f(e) - \sum_{e \in \delta^{out}(U)} f(e).$$

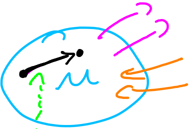


Fonction d'excès

Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté, soit $f : A \to \mathbb{R}$ et soit $U \subseteq V$, alors

$$\mathit{exces}_f(U) = \underbrace{\sum_{v \in U} \mathit{exces}_f(v).}_{f(e)} = \sum_{e \in \delta^{in}(U)} f(e) - \sum_{e \in \delta^{out}(U)} f(e)$$

$$= \mathit{exces}_f(U)$$

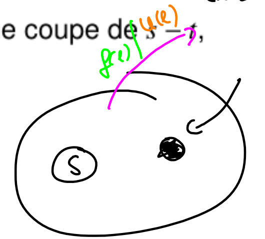


se neutralisent

Dualité faible

Dualité faible

Soit f un flot admissible de s à t et soit $\delta^{out}(U)$ une coupe de $s-t$, alors $value(f) \leqslant u(\delta^{out}(U))$.



$$value(f) = -exces(s)$$

$$= \sum_{v \in U} -exces(v)$$

$$= -exces(U) = \sum_{e \in \delta^{out}(U)} f(e) - \sum_{e \in \delta^{in}(U)} f(e)$$

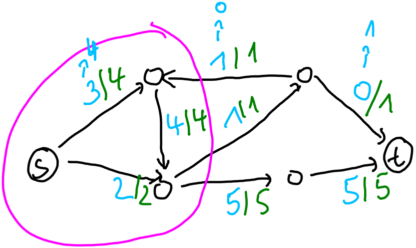
$$\leq \sum_{e \in \delta^{out}(U)} \overbrace{f(e)}^{\leq u(e)} \leq u(\delta^{out}(U))$$

Le Graphe résiduel

Soit $f : A \to \mathbb{R}$ et $u : A \to \mathbb{R}$ où $0 \leqslant f \leqslant u$. Considérons l'ensemble d'arcs

$$A_f = \{a \mid a \in A,\, f(a) < u(a)\} \cup \{a^{-1} \mid a \in A,\, f(a) > 0\}.$$

Le graphe orienté $D(f) = (V, A_f)$ est appelé *graphe résiduel* de f (pour des capacités u).

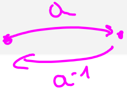


capacité = 6

nouvelle valeur = 6

=> opt !

Le Graphe résiduel

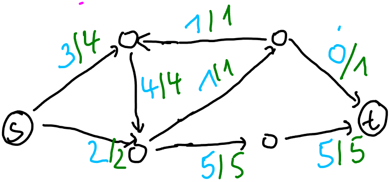


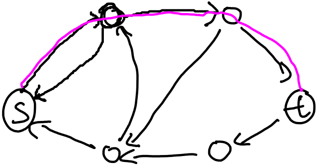
Soit $f : A \to \mathbb{R}$ et $u : A \to \mathbb{R}$ où $0 \leqslant f \leqslant u$. Considérons l'ensemble d'arcs

$$A_f = \{a \mid a \in A,\, f(a) < u(a)\} \cup \{a^{-1} \mid a \in A,\, f(a) > 0\}.$$

Le graphe orienté $D(f) = (V, A_f)$ est appelé *graphe résiduel* de f (pour des capacités u).

Chemin orienté de s à t !!





Graphe résiduel !!

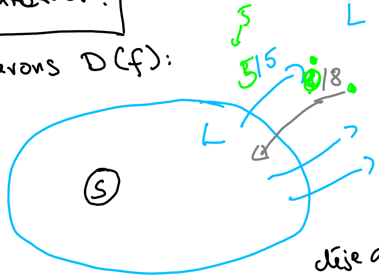
Théorème

Soit f un flot admissible de s à t et supposons qu'il n'y a pas de chemin de s à t dans $D(f)$, alors f est de valeur maximale.

$\boxed{\text{Démonstration:}}$

Considérons $D(f)$:

$L \subseteq V \quad L = \{v : \exists$ chemin de s à v dans $D(f)\}$



$t \notin L$

déjà démontré

$\mu(\delta^{out}(L)) \overset{?}{=} -\text{exces}_f(L) = -\text{exces}(s)$ = valeur de f.

Marches non-orientées

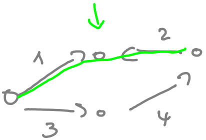
Une *marche non-orientée* est une séquence de la forme $P = (v_0, v_1, \ldots, v_{m-1}, v_m)$, où $(v_{i-1}, v_i) \in A$ ou $(v_i, v_{i-1}) \in A$. Si les sommets $v_0, \ldots, v_m$ sont tous différents, alors P est un *chemin non-orienté*.

$D(f)$ et marches non-orientées

Tout chemin orienté P dans $D(f)$ induit un chemin non-orienté dans D. Définissons pour un tel chemin P le vecteur $\chi^P \in \{0, \pm 1\}^A$ comme

$$\chi^P(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } P \text{ traverse } a, \\ -1 & \text{si } P \text{ traverse } a^{-1}, \\ 0 & \text{si } P \text{ ne traverse ni } a \text{ ni } a^{-1}. \end{cases} \tag{2}$$

chemin non-orienté.



$$\chi^P(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$D(f)$ et marches non-orientées

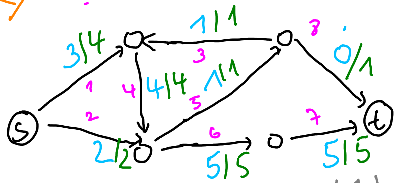
Tout chemin orienté P dans $D(f)$ induit un chemin non-orienté dans D. Définissons pour un tel chemin P le vecteur $\chi^P \in \{0, \pm 1\}^A$ comme

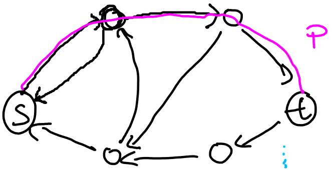
$$\chi^P(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } P \text{ traverse } a, \\ -1 & \text{si } P \text{ traverse } a^{-1}, \\ 0 & \text{si } P \text{ ne traverse ni } a \text{ ni } a^{-1} \end{cases} \qquad (2)$$

nouveau flot !

$f + \chi^P$!

Chemin orienté de s à t !





$\chi^P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

L'algorithme de Ford et Fulkerson

L'algorithme de Ford et Fulkerson

Commencer avec $f = 0$. Puis appliquer itérativement *l'algorithme d'augmentation de flot* suivant:

Soit P un chemin orienté de s à t dans $D(f)$. Soit $f \leftarrow f + \epsilon\chi^P$, où ϵ est aussi grand que possible tout en gardant $0 \leqslant f \leqslant u$.

Quiz

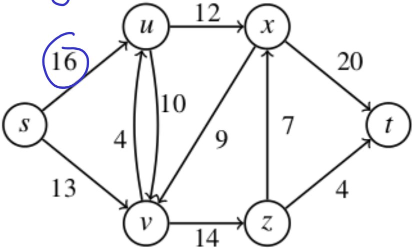
Définissez une *capacité résiduelle* pour $D(f)$. Déterminez ensuite la valeur maximale de ϵ telle que $0 \leqslant f \leqslant u$.

Supposons:

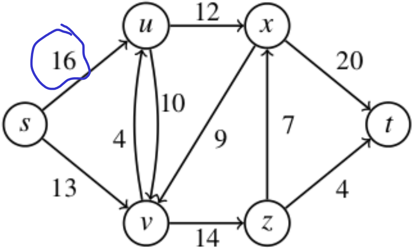
D n'a pas

Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple

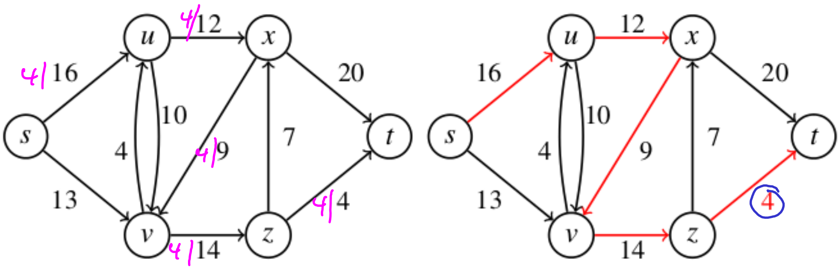
capacités.



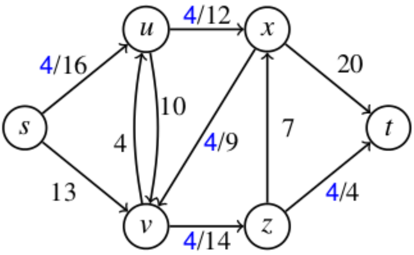
cap. rés.

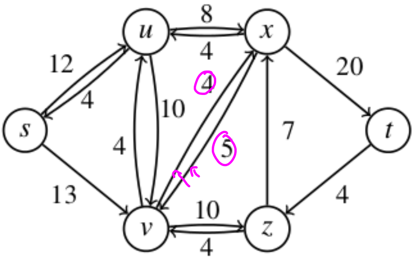


Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple

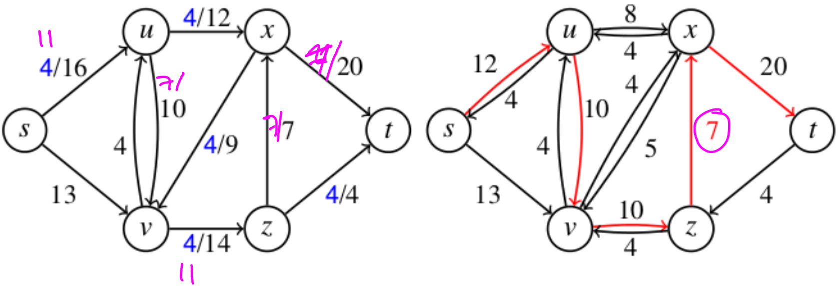


Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple

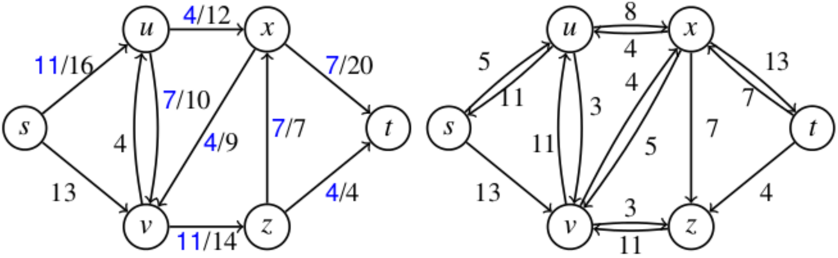




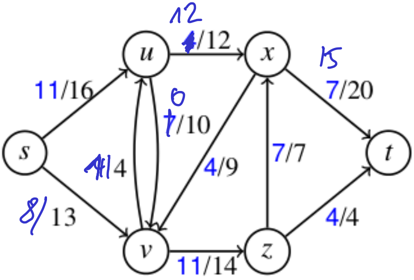
Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple



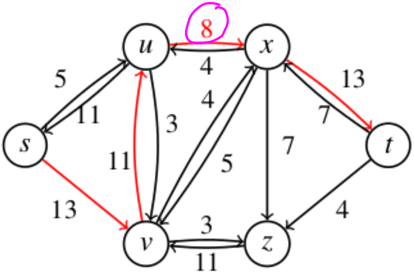
Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple



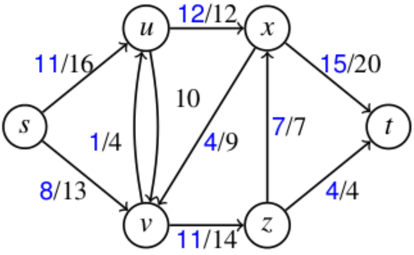
Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple

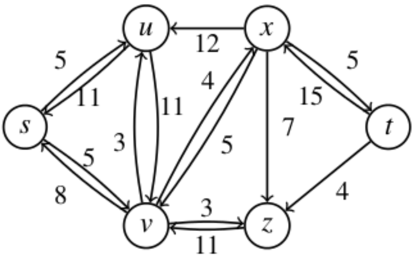


cap. minimale

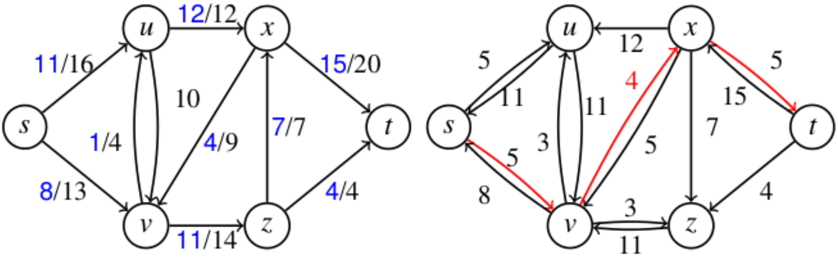


Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple





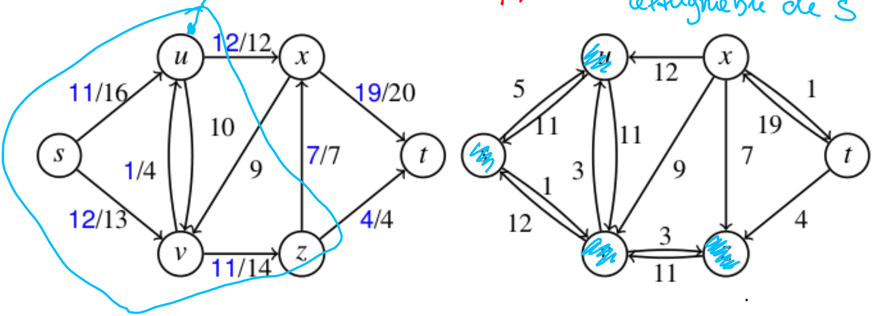
Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple



Algorithme de Ford-Fulkerson : exemple

$Q(u)$ → • n'est pas atteignable de s dans $D(f)$

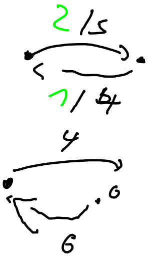
$L \subseteq V$. sommets $D(f)$ atteignable de s



$\mathrm{cap}(\delta^{out}(L)) = 23$

$f = 23$

$L \subseteq V$



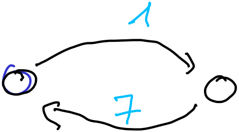
Dualité forte

Theorem (Théorème du flot max et de la coupe min, dualité forte)

La valeur maximale d'un flot admissible de s à t est égale à la capacité d'une coupe minimale de $s-t$.

$f : A \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

Graph résiduel $D(f)$



Dison

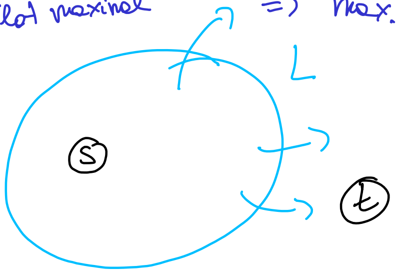
Dualité forte

Theorem (Théorème du flot max et de la coupe min, dualité forte)

La valeur maximale d'un flot admissible de s à t est égale à la capacité d'une coupe minimale de $s-t$.

<u>Démonstration:</u> (Supposé que la val. max. est borné $\Rightarrow$ max. flot existe.

f: Flot maximal



$L \subseteq V$ sommets atteignable de s dans $D(f)$

$t \notin L$ dès que f max.

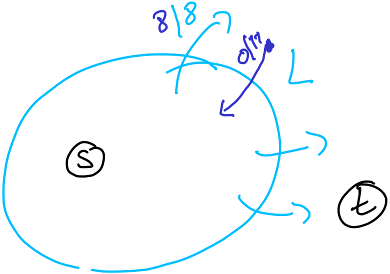
(autrement on pourrait augmenter f encore!)

$\Rightarrow \delta^{out}(L)$ une coupe s-t

Dualité forte

Theorem (Théorème du flot max et de la coupe min, dualité forte)

La valeur maximale d'un flot admissible de s à t est égale à la capacité d'une coupe minimale de $s - t$.



$-\text{excess}(s) = \text{valeur du flot } f$

$$-\text{exces}(s) = -\text{excess}(L) = \text{valeur}(f) = u(\delta^{out}(L))$$

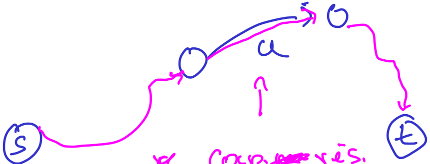
Dualité forte

Corollary (Théorème d'intégralité)

Si $u(a) \in \mathbb{N}$ pour tout $a \in A$, alors il existe un flot maximal entier ($f(a) \in \mathbb{N}$ pour tout $a \in A$).

~~Pr.~~ Dém. On augmente toujours avec un flot intégral.

$u_{rés}(a) \in \mathbb{N}_{\geq 0}$

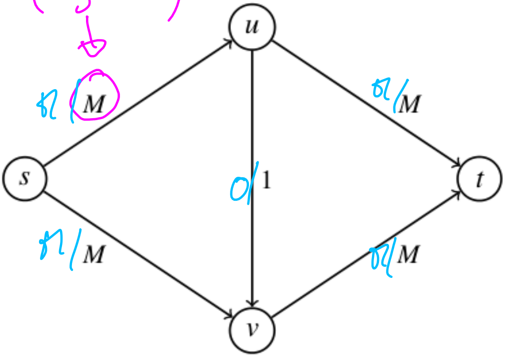


flot et cap. résiduelles restent intégral.

cap. rés. min. sur le chemin dans $D(f)$

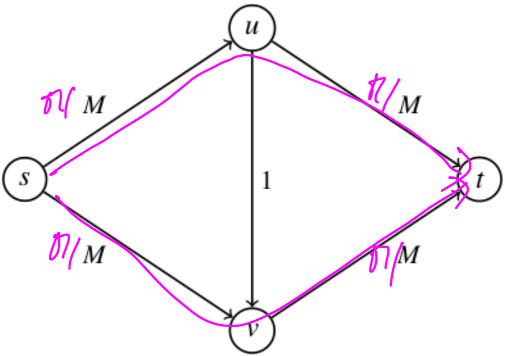
L'algorithme de Ford-Fulkerson s'exécute-t-il en temps polynômial?

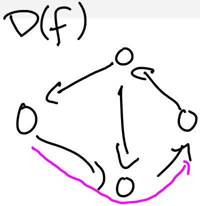
$\Theta(\log(n))$ $\quad n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$



val
flot max $= 2n$.

L'algorithme de Ford-Fulkerson s'exécute-t-il en temps polynômial?

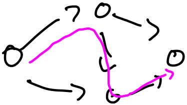




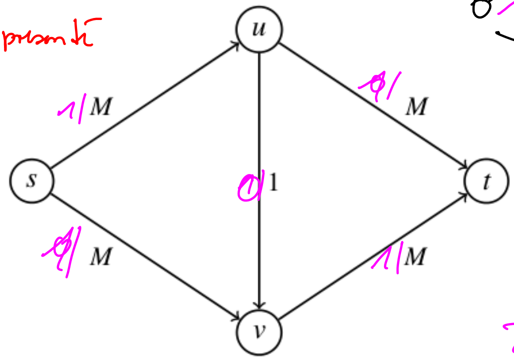
peut terminer en 2 itérations!

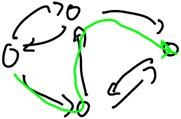
L'algorithme de Ford-Fulkerson s'exécute-t-il en temps polynômial?

D(f)



Disons M est représenté par $\Theta(\log(M))$ bits!!





2

$2M$ itérations => exponentiel en $\log(M)$

Lemme

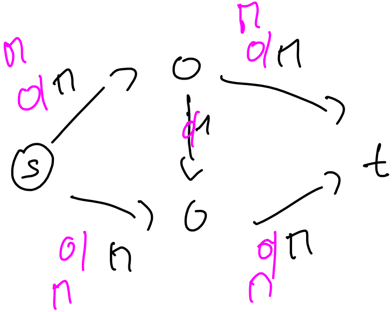
Edmonds & Karp

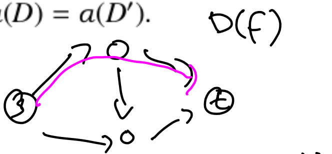
Idée : TROUVER CHEMIN PLUS court (non-pondéré) de s à t dans D(f)

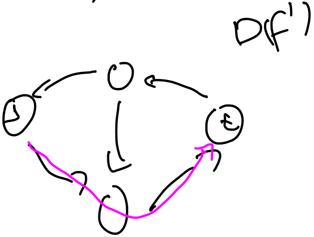
Soient $D = (V, A)$ un graphe orienté, $s, t \in V$ et $\mu(D)$ la longueur d'un plus court chemin de s à t. Soit $a(D)$ l'ensemble d'arcs contenu dans au moins un des plus courts chemins de s à t.

Lemme

Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté et $s, t \in V$. Définissons $D' = (V, A \cup a(D)^{-1})$. Alors $\mu(D) = \mu(D')$ et $a(D) = a(D')$.





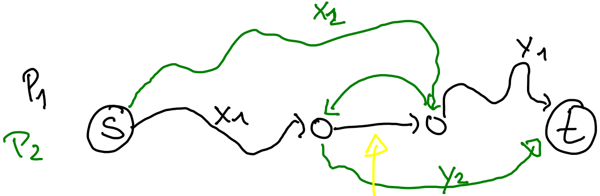


Lemme

Soient $D = (V, A)$ un graphe orienté, $s, t \in V$ et $\mu(D)$ la longueur d'un plus court chemin de s à t. Soit $a(D)$ l'ensemble d'arcs contenu dans au moins un des plus courts chemins de s à t.

Lemme

Soit $D = (V, A)$ un graphe orienté et $s, t \in V$. Définissons $D' = (V, A \cup a(D)^{-1})$. Alors $\mu(D) = \mu(D')$ et $a(D) = a(D')$.



longueur (P1)

~~x1~~

longueur (P2)

Si $x_1 + y_1 \geq x_2 + y_2$

Alors $x_1 + y_2$ ou $x_2 + y_1$ $< x_1 + y_1 + 1$

Chemin plus court (non-pondéré) de s à t.

va disparaître !!

Algorithme en temps polynômial

Théorème

Si à chaque itération nous choisissons un plus court chemin de s à t dans $D(f)$ comme chemin d'augmentation de flot, le nombre d'itérations est au plus $|V| \cdot |A|$.