Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

# Lineare Algebra

## Übungsblatt 5 **16. Oktober 2013**

---

Allgemeine Hinweise:
Lösungen zu der mit einem Stern markierten Aufgabe können in Zweiergruppen bis **Mittwoch, 23. Oktober um 16 Uhr** durch Einwurf in der Box vor Büro MA B1 533 abgegeben werden.

Zusätzlich zu den Übungen ist es empfehlenswert, jede Woche die Aufgaben mit ungerader Nummer im aktuell behandelten Kapitel des Lehrbuchs zu machen. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

### Aufgabe 1

(i) Sei $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0_n \end{bmatrix}$ eine $2n \times 2n$ Matrix, wobei $A$, $B$ und $C$ drei $n \times n$ Matrizen sind und $0_n$ die $n \times n$ Nullmatrix bezeichnet. Dann gilt:

(A) $M^T M = \begin{bmatrix} AA + CC & AB \\ BA & BB \end{bmatrix}$

(B) $M^T M = \begin{bmatrix} A^T A + C^T C & BA^T \\ AB^T & B^T B \end{bmatrix}$

(C) $M^T M = \begin{bmatrix} A^T A + B^T C & A^T B \\ C^T A & C^T B \end{bmatrix}$.

(D) $M^T M = \begin{bmatrix} A^T A + C^T C & A^T B \\ B^T A & B^T B \end{bmatrix}$.

(ii) Sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung mit $T(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 3x_3 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$. Geben Sie die zu $T$ inverse lineare Abbildung an, d.h. $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ , so dass $S(T(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{x}$ für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ und $T(S(\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{y}$ für alle $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^3$ gilt.

(iii)

$$\text{Seien} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie $MN$ auf zwei verschiedene Wegen

- durch die Zeilen-Spalten-Regel.
- durch Spalten-Zeilen-Entwicklung.

(iv)

$$\text{Seien } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Rechnen Sie zunächst $A^2 = I_2$ nach.
(b) Zeigen Sie, dass $M^2 = I_4$ gilt.
(c) Geben Sie $A^{-1}$ und $M^{-1}$ an.

(v) Berechnen Sie die $LU$-Zerlegung jeder der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 4 & -2 \\ 6 & -9 & 7 & -3 \\ -1 & -4 & 8 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ -1 & -5 & 8 \\ 4 & 2 & -5 \\ -2 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

sowie

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 & 3 \\ 6 & -9 & -5 & 8 \\ 2 & -7 & -3 & 9 \\ 4 & -2 & -2 & -1 \\ -6 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

(vi) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(vii) Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der LU-Zerlegung.

**Aufgabe 2** (*)

(i)
- Was ist der Rang einer $6 \times 8$ Matrix $A$, wobei $ker(A)$ Dimension 3 hat?
- Wenn der Rang einer $9 \times 8$ Matrix 7 ist, was ist dann die Dimension von $ker(A)$?
- Konstruieren Sie, falls möglich, eine $3 \times 5$ Matrix $A$, so dass $ker(A)$ Dimension 3 und $Col(A)$ Dimension 2 hat.
- Finden Sie eine $3 \times 4$ Matrix mit Rang 1.

(ii) Sei $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$. Zeigen Sie, dass $U$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist. Beweisen Sie ausserdem, dass

$$\boldsymbol{b_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

eine Basis von $U$ ist. Was ist die Dimension von $U$? Gibt es Matrizen $A$, $B$, so dass $U = Col(A)$ und $U = ker(B)$ gilt?

## Aufgabe 3

(i) Seien

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -5 \\ -4 & -5 & 7 \\ 8 & 6 & -8 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie die LU-Zerlegung von $A$ und nutzen Sie das Ergebnis, um das System $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ zu lösen.

(ii) Welche der folgenden Mengen sind Unterräume des $\mathbb{R}^2$?

- $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 = x_2 + 1 \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 = 3x_2 \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}$
- $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 \leq 0, x_2 \leq 0 \right\}$

(iii) Finden Sie für die folgende Matrix $A$ eine Basis von $Col(A)$ sowie von $ker(A)$ und geben Sie die Dimensionen dieser Räume an.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 5 & 6 \\ -2 & 0 & -2 & 1 & -6 \\ 3 & 1 & 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

**Wahr/Falsch**
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.

**Kapitel 2.8**

(i) Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, wobei $A$ eine $m \times n$ Matrix ist, ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^m$.

(ii) Die Spalten einer invertierbaren $n \times n$ Matrix bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$.

**Kapitel 2.9**

(i) Jede Gerade im $\mathbb{R}^n$ ist ein eindimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$.

(ii) Die Dimension von $Col(A)$ für eine $m \times n$ Matrix $A$ ist die Anzahl der Spalten mit Pivotelementen.

(iii) Die Dimension von $Col(A)$ plus die Dimension von $ker(A)$ ergibt die Anzahl der Spalten der $m \times n$ Matrix $A$.

(iv) Wenn eine Menge von $p$ Vektoren einen $p$-dimensionalen Unterraum $H$ von $\mathbb{R}^n$ aufspannen, dann stellen diese Vektoren eine Basis von $H$ dar.