Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Lineare Algebra

Übungsblatt 8 — 6. November 2013

Allgemeine Hinweise:
Lösungen zu der mit einem Stern markierten Aufgabe können in Zweiergruppen bis **Mittwoch, 13. November um 16 Uhr** durch Einwurf in der Box vor Büro MA B1 533 abgegeben werden.

Zusätzlich zu den Übungen ist es empfehlenswert, jede Woche die Aufgaben mit ungerader Nummer im aktuell behandelten Kapitel des Lehrbuchs zu machen. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

(i) Sei $T\colon \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Transformation gegeben durch
$$T(p(t)) = \begin{pmatrix} p(0) \\ p'(0) \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie eine Basis des Kerns $\ker(T)$ und des Bilds $\operatorname{Im}(T)$.

(ii) Sei
$$C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & -12 \\ 8 & 4 & 4 & -5 & 12 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

1. Finden Sie eine Basis von $\ker(C)$.
2. Wir bezeichnen mit T die durch $T(\boldsymbol{x}) = C\boldsymbol{x}$ definierte lineare Abbildung von $\mathbb{R}^5$ nach $\mathbb{R}^4$. Ist T injektiv ? Ist T surjektiv ? Begründen Sie Ihre Antwort.

(iii) Sei $M_{2\times 2}$ der Vektorraum der 2×2 Matrizen. Wir definieren die Abbildung $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$ durch $T(A) = A + A^T$ für 2×2 Matrizen A.

(a) Zeigen Sie, dass T eine lineare Abbildung ist.
(b) Zeigen Sie, dass das Bild von T die Menge aller symmetrischen 2×2 Matrizen ist, d.h. $C \in M_{2\times 2}$ mit $C = C^T$.
(c) Bestimmen Sie den Kern von T.

(iv) Seien
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 9 & -7 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 5 & -6 & 10 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Zeigen Sie, dass die Matrizen A und B zeilenäquivalent sind.
Bestimmen Sie

1. den Rang von A und $\dim \ker(A)$;

2. eine Basis für jeden der folgenden Unterräume $\mathrm{Col}(A)$, $\mathrm{Row}(A)$, $\ker(A)$, $\mathrm{Col}(A^T)$, $\mathrm{Row}(A^T)$ und $\ker(A^T)$.

Aufgabe 2 $(*)$

(i) Für :

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad [\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

bezeichnen wir mit $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{B}}$ die Koordinaten des Vektors $\boldsymbol{x}$ bezüglich dieser Basis.

1. Bestimmen Sie den Vektor $\boldsymbol{x}$ (das heisst seine Koordinaten bezüglich der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$).
2. Finden Sie den Koordinatenvektor $[\boldsymbol{y}]_{\mathcal{B}}$ von

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 10 \\ -9 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Seien $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}\}$ und $\mathcal{C} = \{\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}\}$ zwei Basen eines Vektorraums V. Angenommen, es gilt $\boldsymbol{b_1} = 6\boldsymbol{c_1} - 2\boldsymbol{c_2}$ und $\boldsymbol{b_2} = 9\boldsymbol{c_1} - 4\boldsymbol{c_2}$.

(a) Finden Sie die Basiswechselmatrizen $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ und $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$.

(b) Finden Sie $[\boldsymbol{x}]_{\mathcal{C}}$ für $\boldsymbol{x} = -3\boldsymbol{b_1} + 2\boldsymbol{b_2}$ mit Hilfe von (a).

(iii) Betrachten Sie die folgenden Basen von $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}, \qquad \mathcal{C} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}.$$

Finden Sie die Basiswechselmatrizen $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$ und $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$. Bestimmen Sie dann $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$ für

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(iv) Sei $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die durch

$$T(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 \\ 10x_1 - 8x_2 \\ x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung. Geben Sie die Standardmatrix von T bezüglich der Basen $\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{C} = \{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ von $\mathbb{R}^3$ an.

Aufgabe 3

(i) Wir betrachten die Basis $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ von $\mathbb{P}_2$ mit
$$p_1(t) = 1 + t + t^2, \quad p_2(t) = 2t - t^2, \quad p_3(t) = 2 + t - t^2.$$
Bestimmen Sie $[t]_{\mathcal{B}}$ und $[1 + t^2]_{\mathcal{B}}$.

(ii) Sei $\psi : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ die durch $\psi(p)(t) = p(t+1)$ definierte Abbildung. Zeigen Sie, dass ψ linear ist. Bestimmen Sie die Matrix von ψ in der Standardbasis $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ und bezüglich der Basis $\mathcal{C} = \{1 - t, 2 - t, 1 + t^2\}$.

Wahr/Falsch

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Kapitel 4.3, 4.4, 4.5

(i) Die Menge mit genau einem Vektor ist linear unabhängig.

(ii) Wenn $\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_p) = V$ gilt, dann ist eine Teilmenge von $\{v_1, \ldots, v_p\}$ eine Basis von V.

(iii) Die Dimension von $\mathbb{P}_n$ ist n.

(iv) Der einzige Unterraum H von $\mathbb{R}^3$ mit $\dim(H) = 3$ ist $\mathbb{R}^3$.

Kapitel 4.6 & 4.7

Im Folgenden bezeichnet A eine $m \times n$ Matrix.

(i) $\operatorname{Row}(A) = \operatorname{Col}(A)$

(ii) $\dim \operatorname{Row}(A) = \dim \operatorname{Col}(A)$

(iii) $\operatorname{Row}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$.

(iv) $\dim \operatorname{Row}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = n$

(v) Es gibt eine 6×9 Matrix B so dass $\dim \operatorname{Ker}(B) = 2$ gilt.

(vi) Für zwei Basen $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ eines Vektorraums V sind die Spalten von $\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P}$ linear unabhängig.