Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Lineare Algebra

Übungsblatt 7 — 30. Oktober 2013

Allgemeine Hinweise:
Lösungen zu der mit einem Stern markierten Aufgabe können in Zweiergruppen bis **Mittwoch, 6. November um 16 Uhr** durch Einwurf in der Box vor Büro MA B1 533 abgegeben werden.

Zusätzlich zu den Übungen ist es empfehlenswert, jede Woche die Aufgaben mit ungerader Nummer im aktuell behandelten Kapitel des Lehrbuchs zu machen. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Hinweise zum Test und zur Klausur:

Klausur (obligatorisch)
Datum: Montag 20.01.2014 von 08h15 bis 11h15
Inhalt: Alle behandelten Themen der Vorlesung und alle Übungsblätter sind klausurrelevant. Die Fragen werden vom Typ "Multiple choice" und Wahr/Falsch sein.

Test (Semestermitte, optional)
Datum: Dienstag 19.11.2013 von 15h10 bis 16h
Raum: CM1 105 (während der Übungsstunde)
Inhalt: der bis zu diesem Tag behandelte Stoff der Vorlesung. Der Aufbau des Tests wird ähnlich zu dem der Klausur sein.

Der Test wird korrigiert. Es wird dringendst empfohlen, den Test mitzuschreiben, da er zur Übung dient und Sie auf die Klausur vorbereitet. Der Test ist fakultativ, es gibt keine Bonuspunkte und das Ergebnis geht nicht in die Endnote ein.

Aufgabe 1

(i) Für welche Werte von s ist das folgende lineare Gleichungssystem eindeutig lösbar?

$$\begin{aligned} 3x_1 - 2sx_2 &= 4 \\ -sx_1 + 6x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Geben Sie diese Lösung an (in Abhängigkeit von s).

(ii) Bestimmen Sie die Adjunkte $adj(A)$ der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

und geben Sie A^{-1} an.

Aufgabe 2 (*)

(i) Sei $\mathbb{P}_3$ der Vektorraum der Polynome in einer Variablen mit Grad höchstens 3. Bestimmen Sie welche der folgenden Mengen ein Unterraum von $\mathbb{P}_3$ ist :

a. Die Menge der Polynome der Form $p(t) = at$ wobei a eine beliebige reelle Zahl ist.

b. Die Menge der Polynome der Form $p(t) = a + t^2$ wobei a eine beliebige reelle Zahl ist.

c. Die Menge der Polynome der Form $p(t) = c_1 t^3 + c_2 t^2 + c_3 t + c_4$, wobei c_1, c_2, c_3 und c_4 beliebige ganze Zahlen sind.

d. Die Menge aller Polynome in $\mathbb{P}_3$, die $p(0) = 0$ erfüllen.

d. Die Menge aller Polynome in $\mathbb{P}_3$, die $p(0) = 1$ erfüllen.

d. Die Menge aller Polynome in $\mathbb{P}_3$, die $p(1) = 0$ erfüllen.

(ii) Sei $V = \mathbb{R}_{>0}$ die Menge aller *positiven* reellen Zahlen. Wir definieren die Addition $\oplus$ in V durch $x \oplus y = xy$ für alle $x, y \in V$, und definieren die Skalarmultiplikation $\otimes$ durch $c \otimes x = x^c$ für alle $x \in V$ und $c \in \mathbb{R}$. Verifizieren Sie, dass V mit dieser Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum ist.

(iii) Sei $\mathbb{P}_3$ der Vektorraum der Polynome mit Grad höchstens 3. Sei S der durch

$$p_1(t) = 1 + t^2, p_2(t) = 3t + 4t^3, p_3(t) = 1 + t + 5t^2 + 4t^3$$

erzeugte Unterraum. Gilt $1 + 2t + 3t^2 + 4t^3 \in S$?

(iv) Sei $S \subset \mathbb{R}^4$ die Menge aller Vektoren $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4$, die $x_1 - 2x_3 + x_4 = 0$, $x_2 + 3x_3 = 0$, und $x_1 - x_4 = 0$ erfüllen. Zeigen Sie, dass S ein Unterraum von $\mathbb{R}^4$ ist. Finden Sie eine Basis von S und bestimmen Sie $dim(S)$.

(v) Sei V ein Vektorraum und seien S und T Unterräume von V . Wir definieren deren Summe $S + T$ als Menge

$$S + T = \{s + t \colon s \in S, t \in T\}$$

. Zeigen Sie, dass $S + T$ ein Unterraum von V ist.

Aufgabe 3

(i) Seien

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \\ -4 & 12 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & -2 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Für welches p ist $\ker(A)$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^p$?

b) Für welches q ist $\ker(B)$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^q$?

b) Für welches k ist $\mathrm{Col}(A)$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^k$?

b) Für welches l ist $\mathrm{Col}(B)$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^l$?

e) Finden Sie ein von 0 verschiedenen Vektor in $\ker(A)$.

f) Finden Sie ein von 0 verschiedenen Vektor in $\ker(B)$.

g) Finden Sie ein von 0 verschiedenen Vektor in $\mathrm{Col}(A)$.

h) Finden Sie ein von 0 verschiedenen Vektor in $\mathrm{Col}(B)$.

(ii) Bestimmen Sie für

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5/2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix},$$

ob $\boldsymbol{w}$ im Spaltenraum $\mathrm{Col}(A)$ oder im Kern $\ker(A)$ liegt.

Wahr/Falsch

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Kapitel 4.1 & 4.2

(i) Ein Unterraum eines Vektorraums ist auch selbst ein Vektorraum.

(ii) $\mathbb{R}^2$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$.

(iii) Wenn S_1 und S_2 Unterräume eines Vektorraums V sind, dann ist auch $S_1 \cup S_2$ ein Unterraum von V.

(iv) Wenn S_1 und S_2 Unterräume eines Vektorraums V sind, dann ist auch $S_1 \cap S_2$ ein Unterraum von V.

(v) Für eine $m \times n$ Matrix A gilt $\ker(A) \subseteq \mathbb{R}^m$.

(vi) Für eine $m \times n$ Matrix A gilt $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^m$ wenn $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösbar ist für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$.

(vii) Der Spaltenraum einer $m \times n$ Matrix ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

(viii) Die Menge $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ ist eine Basis von $V = \mathit{span}(\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n})$.