Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Lineare Algebra

Übungsblatt 4 **9. Oktober 2013**

Allgemeine Hinweise:
Lösungen zu der mit einem Stern markierten Aufgabe können in Zweiergruppen bis **Mittwoch, 16. Oktober um 16 Uhr** durch Einwurf in der Box vor Büro MA B1 533 abgegeben werden.

Zusätzlich zu den Übungen ist es empfehlenswert, jede Woche die Aufgaben mit ungerader Nummer im aktuell behandelten Kapitel des Lehrbuchs zu machen. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

(i) Gegeben die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 3 \\ 5 & 7 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

berechnen Sie AC, BC und CB.

(ii) Gegeben

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{bmatrix},$$

für welche Werte von k gilt $AB = BA$?

(iii) Gegeben die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 8 & 2 \end{bmatrix}.$$

Falls das Produkt definiert ist, berechnen Sie:

$$AB, CA, CD, DC, DBC, BDB, A^T A, AA^T.$$

Andernfalls erklären Sie, warum das Produkt nicht definiert ist.

(iv) Seien

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et } T = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $MN = MT$ gilt, obwohl N von T verschieden ist.

(v) Seien A und B zwei quadratische $n \times n$ Matrizen so dass $A^2 = B^2 = 0$ gilt. Zeigen Sie, warum $(A + B)(A - B) = 0$ im Allgemeinen nicht gilt. In welchen Fällen trifft es zu?

(vi) Gegeben die Matrizen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ und $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

1. Berechnen Sie AD sowie DA und erklären Sie, wie sich die Spalten und Zeilen von A durch Multiplikation mit D von rechts bzw. links verändern.
2. Bestimmen Sie alle 3×3 Diagonalmatrizen M mit $AM = MA$.

(vii) Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -6 & 13 \end{bmatrix},$$

(a) unter Zuhilfenahme der Inversenformel für 2×2 Matrizen aus der Vorlesung (Satz 20)

(b) durch elementare Zeilenoperationen angewendet auf $[A\ I]$.

Nutzen das Ergebnis, um das folgende System zu lösen

$$\begin{aligned} 3x - 7y &= -4 \\ -6x + 13y &= 1. \end{aligned}$$

(viii) Geben Sie die folgenden 3×3 Elementarmatrizen an:

- E_1 vertauscht die zweite und dritte Zeile;
- E_2 multipliziert die zweite Zeile mit 8;
- E_3 addiert zur dritten Zeile 7 mal die erste Zeile hinzu.

Sind die Matrizen E_1, E_2 und E_3 invertierbar? Warum? Wenn ja, bestimmen Sie ihre Inversen und die Inverse des Produkts $E_1 \cdot E_2 \cdot E_3$.

Aufgabe 2 $(*)$

- Zeigen Sie: Eine lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann injektiv, wenn T surjektiv ist.
- Seien A, B, C invertierbare $n \times n$-Matrizen. Zeigen Sie, dass ABC auch invertierbar ist durch Angabe einer Matrix D, so dass $(ABC)D = I$ und $D(ABC) = I$ gilt.

Aufgabe 3

(i) Für die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -4 & 0 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -1 & -3 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 2 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

gilt

(A) $(AB)_{32} = 1$
(B) $(AB)_{32} = -5$
(C) $(AB)_{32} = -1$
(D) $(AB)_{32} = 0$.

(ii) Die Inverse von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

erfüllt

(A) $(A^{-1})_{41} = 0$
(B) $(A^{-1})_{41} = 3/4$
(C) $(A^{-1})_{41} = -1$
(D) $(A^{-1})_{41} = -1/4$.

(iii) Welche der folgenden Matrizen sind invertierbar?
Rechnen Sie so wenig wie möglich, um Ihre Antwort zu begründen.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -4 & 7 \\ -1 & 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

(iv) Berechnen Sie die Inverse der Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wahr/Falsch
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Kapitel 2.1

(i) Jede Spalte von AB ist eine Linearkombination der Spalten von B mit Gewichten aus der zugehörigen Spalte von A.
(ii) Es gilt $A^T + B^T = (A + B)^T$.
(iii) Es gilt $(AB)^T = A^T B^T$.
(iv) Für eine $n \times n$ Matrix A gilt $(A^2)^T = \left(A^T\right)^2$.

Kapitel 2.2

(i) Die Inverse von AB ist $A^{-1}B^{-1}$, wobei A und B invertierbare $n \times n$ Matrizen sind.
(ii) Für eine invertierbare $n \times n$ Matrix A ist die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ lösbar.
(iii) Jede Elementarmatrix ist invertierbar.
(iv) Wenn $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ und $ab - cd \neq 0$ gilt, dann ist A invertierbar.
(v) Es gilt $A = (A^{-1})^{-1}$ für jede invertierbare Matrix A.

Kapitel 2.3

(i) Wenn die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ nur die triviale Lösung hat, dann ist A invertierbar.
(ii) Falls die Spalten einer $n \times n$ Matrix A den Raum $\mathbb{R}^n$ erzeugen, dann sind die Spalten linear unabhängig.
(iii) Falls die Spalten einer $n \times n$ Matrix A linear unabhängig sind, dann erzeugen die Spalten den Raum $\mathbb{R}^n$.
(iv) Für eine $n \times n$ Matrix A hat die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ für alle $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ mindestens eine Lösung.
(v) Wenn A^T nicht invertierbar ist, ist auch A nicht invertierbar.
(vi) Seien A, D $n \times n$ Matrizen mit $AD = I$ (I ist die $n \times n$ Einheitsmatrix). Dann gilt auch $DA = I$.
(vii) Wenn für eine $n \times n$ Matrix A ein Vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass die Gleichung $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ lösbar ist, dann ist die Lösung eindeutig.