Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Lineare Algebra

Übungsblatt 3 — 2. Oktober 2013

Allgemeine Hinweise:
Lösungen zu der mit einem Stern markierten Aufgabe können in Zweiergruppen bis **Mittwoch, 9. Oktober um 16 Uhr** durch Einwurf in der Box vor Büro MA B1 533 abgegeben werden.

Zusätzlich zu den Übungen ist es empfehlenswert, jede Woche die Aufgaben mit ungerader Nummer im aktuell behandelten Kapitel des Lehrbuchs zu machen. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

(i) Sind die Vektoren

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} -8 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

linear abhängig?

(ii) Sind die Spalten der Matrix

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 10 & -7 & 1 \\ -5 & -5 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

linear unabhängig?

(iii) Gegeben die Vektoren

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ h \end{bmatrix}$$

für welche Werte von h gilt $\boldsymbol{v}_3 \in \operatorname{Span}\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$? Für welche Werte von h ist die Menge $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ linear abhängig?

Aufgabe 2 (∗)

Seien $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{w}$ drei Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz: $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ ist linear unabhängig genau dann wenn $\{\boldsymbol{u}+2\boldsymbol{v}+2\boldsymbol{w}, 2\boldsymbol{u}+4\boldsymbol{v}+5\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}+3\boldsymbol{v}+5\boldsymbol{w}\}$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 3

(i) Welche der folgenden Abbildungen ist linear? Begründen Sie Ihre Antwort.

- $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x+3y \\ 5x-y \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y-1 \\ x-y \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 2x-y$
- $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x-y \\ 4x+5y \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x+3y \\ 5x-y \\ x+2y \\ 3x-4y \end{bmatrix}$

(ii) Finden Sie die Standardmatrizen der folgenden linearen Abbildungen

- $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$.
- $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,
  $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(iii) Geben Sie für die folgenden Beschreibungen einer linearen Abbildung $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Transformationsmatrix an. Wir nutzen die kanonische Basis des $\mathbb{R}^2$, dh. $\boldsymbol{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(a) T lässt $\boldsymbol{e_1}$ unverändert und bildet $\boldsymbol{e_2}$ auf $\boldsymbol{e_2} + 2\boldsymbol{e_1}$ ab.
(b) T rotiert die Punkte um 270 Grad um den Ursprung.
(c) T spiegelt Punkte zunächst an der x_1-Achse und spiegelt sie dann an der Geraden $x_1 = x_2$.

(iv) Entscheiden Sie, ob die folgenden linearen Transformationen injektiv oder surjektiv sind:

(a) $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ et $\boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

(b) $\boldsymbol{T}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \boldsymbol{T}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_2+x_3 \\ x_3+x_4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Wahr/Falsch
Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Kapitel 1.7

(i) Die Spalten einer Matrix $\boldsymbol{A}$ sind linear unabhängig wenn die Matrixgleichung $\boldsymbol{A}x = 0$ nur die triviale Lösung hat.
(ii) Wenn eine Menge von Vektoren linear abhängig ist, dann ist jeder Vektor eine Linearkombination der übrigen Vektoren in der Menge.
(iii) Die Spalten einer beliebigen 4×5 Matrix sind immer linear abhängig.
(iv) Wenn drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ in derselben Ebene liegen, dann sind sie linear abhängig.
(v) Wenn eine Menge von Vektoren im $\mathbb{R}^n$ linear abhängig ist, enthält sie mehr als n Vektoren.
(vi) Seien $v_1, \ldots, v_4 \in \mathbb{R}^4$ linear abhängig. Dann ist v_1, v_2, v_3 auch linear abhängig.
(vii) Seien $v_1, \ldots, v_4 \in \mathbb{R}^4$ linear unabhängig. Dann ist v_1, v_2, v_3 auch linear unabhängig.
(viii) Seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ und v_2 kein Vielfaches von v_1. Dann ist $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig.

Kapitel 1.8

(i) Sei $\boldsymbol{A}$ eine 3×5 Matrix und $T(x) = Ax$ eine lineare Abbildung. Dann ist die Definitionsmenge von T der Raum $\mathbb{R}^3$.
(ii) Eine Abbildung T ist linear genau dann wenn $T(c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_1}) = c_1T(\boldsymbol{v_1}) + c_2T(\boldsymbol{v_2})$ gilt für alle $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ im Definitionsbereich von T und alle $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
(iii) Für eine lineare Abbildung T gilt immer $T(0) = 0$.

Kapitel 1.9

(i) Wenn zwei lineare Transformationen hintereinander ausgeführt werden, ist diese Kombination nicht unbedingt eine lineare Abbildung.
(ii) Sei $\boldsymbol{A}$ eine 3×2 Matrix. Dann ist die Abbildung $T(x) = Ax$ nicht injektiv.
(iii) Eine Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist bijektiv genau dann wenn jeder Vektor im $\mathbb{R}^n$ das Bild von genau einem Vektor im $\mathbb{R}^n$ ist.