Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Lineare Algebra

Übungsblatt 13 — 11. Dezember 2013

Allgemeine Hinweise:
Lösungen zu der mit einem Stern markierten Aufgabe können in Zweiergruppen bis **Mittwoch, 18. Dezember um 16 Uhr** durch Einwurf in der Box vor Büro MA B1 533 abgegeben werden.

Zusätzlich zu den Übungen ist es empfehlenswert, jede Woche die Aufgaben mit ungerader Nummer im aktuell behandelten Kapitel des Lehrbuchs zu machen. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

(i) Bestimmen Sie eine orthogonale Diagonalisierung von

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

(ii) Sei $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ mit $\det A \neq 0$ und $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ eine quadratische Form. Für welche Werte von $\det(A)$ und a ist die Q positiv definit, negativ definit beziehungsweise indefinit?

Aufgabe 2 ($*$)

(i) Zeigen Sie: Wenn A orthogonal diagonalisierbar ist, dann ist auch A^2 orthogonal diagonalisierbar.

(ii) Sei

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Diagonalisierung von A.

(iii) Bestimmen Sie das Minimum und das Maximum der Funktion $f(x, y) = 5x^2 - 4xy + 5y^2$ auf dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$.

Aufgabe 3

(i) Für $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, was ist $\mathbf{v}^T\mathbf{v}$ beziehungsweise $\mathbf{v}\mathbf{v}^T$?

Geben Sie die Projektionsmatrix an, die einen Vektor in den von $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ aufgespannten Unterraum von $\mathbb{R}^3$ projeziert, und nutzen Sie sie, um $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in diesen Unterraum Span($\mathbf{v}$) zu projezieren.

(ii) Seien $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^2$.

(a) Finden Sie die Matrix A zur quadratischen Form

$$Q(\boldsymbol{x}) = x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2.$$

(b) Bestimmen Sie einen Variablenwechsel $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$, der die quadratische Form $Q(\boldsymbol{x})$ in eine quadratische Form $Q(\boldsymbol{y}) = ay_1^2 + by_2^2$ (ohne gemischte Terme) überführt. Geben Sie a und b an.

(iii) Wir betrachten die quadratische Form

$$Q(\mathbf{x}) = 13x_1^2 + 22x_2^2 + 5x_3^2 + 12x_1x_2.$$

(a) Finden Sie die Matrix A von Q, so dass $(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ gilt.

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von Q und charakterisieren Sie den Typ von Q.

(c) Berechnen Sie die Hauptachsen von Q.

(d) Beschreiben Sie durch eine Variablenwechsel $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y}$, die Form $Q(\boldsymbol{y})$ ohne gemischte Terme. Geben Sie die Matrix P an.

Wahr/Falsch

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Kapitel 7.1 und 7.2

(i) Jede orthogonal diagonalisierbare $n \times n$ Matrix ist symmetrisch.

(ii) Jede symmetrische $n \times n$ Matrix hat n verschiedene reelle Eigenwerte.

(iii) Eine Matrix A ist orthogonal diagonalisierbar genau dann, wenn A symmetrisch und invertierbar ist.

(iv) Die Hauptachsen einer quadratischen Form $\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ sind die Eigenvektoren von A.

(v) Wenn alle Eigenwerte einer symmetrischen Matrix A positiv sind, dann ist die quadratische Form $\boldsymbol{x}A\boldsymbol{x}$ positiv definit.

(vi) Der Ausdruck $\|\boldsymbol{x}\|^2$ beschreibt eine quadratische Form.