Prof. F. Eisenbrand EPFL - DISOPT

Lineare Algebra

Übungsblatt 11 — 27. November 2013

Allgemeine Hinweise:
Lösungen zu der mit einem Stern markierten Aufgabe können in Zweiergruppen bis **Mittwoch, 4. Dezember um 16 Uhr** durch Einwurf in der Box vor Büro MA B1 533 abgegeben werden.

Zusätzlich zu den Übungen ist es empfehlenswert, jede Woche die Aufgaben mit ungerader Nummer im aktuell behandelten Kapitel des Lehrbuchs zu machen. Lösungen hierzu finden sich am Ende des Buches.

Aufgabe 1

(i) Seien

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $\mathbf{u}^T\mathbf{u}$, $\mathbf{v}^T\mathbf{v}$, $\mathbf{u}^T\mathbf{v}$, $\|\mathbf{u}\|$ und $\|\mathbf{v}\|$.
b) Normieren Sie $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ (d.h. finden Sie Einheitsvektoren mit der gleichen Richtung).
c) Bestimmen Sie die Distanz zwischen $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$, sowie den eingeschlossenen Winkel.

(ii) Welche Paare der folgenden Vektoren sind orthogonal?

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 15 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(iii) Zeigen Sie den Satz von Pythagoras (mit Hilfe von Vektoren, Orthogonalität, Norm) :
In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge der Hypotenuse im Quadrat gleich der Summe der Kathetenlängen im Quadrat.

(iv) Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $S^\perp = \mathrm{Span}(S)^\perp$ gilt und dass $S^\perp$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

Geben Sie für $S = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \} \subset \mathbb{R}^3$ eine Basis von $S^\perp$ an.

Aufgabe 2 $(*)$

(i) Seien

$$\boldsymbol{b_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_3}\}$ eine orthogonale Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Drücken Sie die Vektoren

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

jeweils in dieser Basis $\mathcal{B}$ aus.

(ii) Seien

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\mathbf{v}_4$, so dass $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ eine orthogonale Basis von $\mathbb{R}^4$ ist. Stellen Sie

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

in dieser Basis dar.

(iii) Seien

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die orthogonale Projektion $\hat{y} = \mathrm{proj}_W(\mathbf{y})$ von $\mathbf{y}$ in den Unterraum W, der von $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ aufgespannt wird. Geben Sie $\hat{y}$ sowohl in der Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ von W als auch in der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ an. Fertigen Sie eine Skizze Ihrer Berechnungen an.

(iv) Seien

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Distanz von $\mathbf{y}$ zur von $\mathbf{u}_1$ erzeugten Gerade sowie die Distanz von $\mathbf{y}$ zu der von $\mathbf{u}_1$ und $\mathbf{u}_2$ aufgespannten Ebene.

(v) Sei A eine $m \times n$ Matrix. Zeigen Sie, dass sich jedes $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ zerlegen lässt in $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{u}$ mit $\boldsymbol{p}$ aus dem Zeilenraum $\mathrm{Row}(A)$ und $\boldsymbol{u}$ aus dem Kern $\ker(A)$.

Aufgabe 3

(i) Zeigen Sie, dass die Rotationsmatrix

$$R = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

wobei t beliebige reelle Zahl ist, orthogonal ist (d.h. $RR^T = I = R^T R$). Berechnen Sie $\det R$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von R und die zugehörigen Eigenvektoren.

(ii) Zeigen Sie, dass die Spiegelung

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

orthogonal ist. Berechnen Sie $\det U$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von U und die zugehörigen Eigenvektoren.

(iii) (a) Zeigen Sie, dass die Spalten der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

eine orthogonale Menge bilden.

(b) Sei U die Matrix, die wir durch Normalisieren der Spalten von A erhalten. Ist UU^T eine Diagonalmatrix? Geben Sie ohne weitere Rechnung an, ob $U^T U$ eine Diagonalmatrix ist.

(c) Sei

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Wir setzen $\boldsymbol{p} = UU^T\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/9 \\ -13/9 \\ -5/9 \end{bmatrix}$ und $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{p}$. Erklären Sie, warum $\boldsymbol{p} \in \mathrm{Col}(A)$ gilt und zeigen Sie, dass $\boldsymbol{z}$ zu $\boldsymbol{p}$ und jeder Spalte von A orthogonal ist.

(d) Berechnen Sie die Distanz von $\boldsymbol{y}$ zu $\mathrm{Col}(A)$, d.h. $\|z\|$.

Wahr/Falsch

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr (W) oder falsch (F) sind und begründen Sie Ihre Antwort.

Kapitel 6.1, 6.2 und 6.3

(i) Seien $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Wenn $\mathbf{u}$ orthogonal zu $\mathbf{v}$ ist und $\mathbf{v}$ orthogonal zu $\mathbf{w}$ ist, dann ist $\mathbf{u}$ nicht orthogonal zu $\mathbf{w}$.

(ii) Wenn die Distanz zwischen $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ gleich der Distanz zwischen $\mathbf{u}$ und $-\mathbf{v}$ ist, dann sind $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ orthogonal.

(iii) Für eine quadratische Matrix A sind die Vektoren des Spaltenraums $\mathrm{Col}(A)$ orthogonal zu den Vektoren des Kerns $\mathrm{Ker}(A)$.

(iv) Sei W ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Wenn $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ orthogonal zu jedem Vektor in einer Basis von W ist, dann gilt $\mathbf{x} \in W^{\perp}$.

(v) Jede linear unabhängige Menge von Vektoren ist auch eine orthogonale Menge.

(vi) Nicht jede orthogonale Menge von Vektoren ist auch linear unabhängig.

(vii) Für eine $m \times n$ Matrix A mit orthonormalen Spalten und $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|Ax\| = \|x\|$.

(viii) Sei W ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$. Wenn $\boldsymbol{v}$ sowohl in W als auch in $W^{\perp}$ liegt, dann ist $\boldsymbol{v}$ der Nullvektor.

(ix) Sei A eine $n \times n$ Matrix. Die Spalten von A sind orthonormal (d.h. sie bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$) genau dann, wenn $\det(A) = 1$ gilt.

(x) Wenn eine $m \times n$ Matrix A die Gleichung $AA^T = I_n$ erfüllt (I_n ist $n \times n$ Einheitsmatrix), dann gilt $m = n$.