Lineare Algebra

Friedrich Eisenbrand

Saarland

Lux

Frankreich

Webseite: http://disopt.epfl.ch/LinAlg14
Textbuch: David C. Lay, Linear Algebra and its applications

Vorlesung:	Dienstag 13-15	CM1
	Donnerstag 14-16	CM1120
Übung:	Donnerstag 16-17	BS270
	+ eine weitere Übung	
	Montag 13-14	CM1100, Jannik
	Dienstag 15-16	CM1105, Carsten
	Mittwoch 13-14	CM1100, Claudio
	Freitag 12-13	CM1100, Jonas

Abgabe Übungszettel bis Montag 11:00 in Box vor MA C1 573
Hauptassistent: carsten.moldenhauer@epfl.ch

Klausur: 80% zentral, 20% spezifisch

Beweisaufgaben.

Probeklausur in Woche neun (11./13. November)

Slides:

https://www.dropbox.com/sh/mcg51gczrwv0a4o/AAALXVvoKj1DQT7bvEj6YXuua?dl=0

Wiederholung

- Lineare Gleichungen
- Systeme linearer Gleichungen

Wesentliches Thema:

Algorithmische Behandlung (Lösung) von Gleichungssystemen

Lineare Gleichung in einer Variable

Beispiel

Eine Mühle mahlt in einer Stunde 5 T Mehl. Wieviele Stunden muss die Mühle betrieben werden, um 18 T Mehl zu mahlen?

x : Anzahl Stunden

$x \cdot 5 = 18, \quad | \div 5$

$x = \frac{18}{5}$ entspricht 3h und 36 Min.

Lineare Gleichung mit einer Variable:

Konstanten

(*) $a \cdot x = b$

Variable

Wann ist (*) lösbar?

1. Fall: $a \neq 0$

$x^* = \frac{b}{a}$ ist eindeutige Lösung (*)

2. Fall: $a = 0$

1. Unterfall $b \neq 0$

(*) nicht lösbar

2. Unterfall: $b = 0$

jedes $x^* \in \mathbb{R}$ ist ~~Lösung~~ Lösung

Sprich: x^* aus den reellen Zahlen

Lineare Gleichungssysteme

Beispiel

Ein Müller besitzt zwei Mühlen. Die Mühle A produziert in einer Stunde 5 T Mehl und 2 T Kleie. Die Mühle B produziert in einer Stunde 4 T Mehl und 2 T Kleie.
Gibt es Betriebszeiten t_A und t_B jeweils für die Mühlen A und B, sodass beide gemeinsam genau 7 T Mehl und 3 T Kleie produzieren?

Beispiel

Ein Müller besitzt zwei Mühlen. Die Mühle A produziert in einer Stunde 5 T Mehl und 2 T Kleie. Die Mühle B produziert in einer Stunde 4 T Mehl und 2 T Kleie.
Gibt es Betriebszeiten t_A und t_B jeweils für die Mühlen A und B, sodass beide gemeinsam genau 7 T Mehl und 3 T Kleie produzieren?

$$\begin{aligned} 5 \cdot x_1 \quad + \quad 4 \cdot x_2 \quad &= 7 \qquad \text{(Mehl)} \\ 2 \cdot x_1 \quad + \quad 2 \cdot x_2 \quad &= 3 \qquad \text{(Kleie)} \end{aligned}$$

$x_1 \hat{=} t_A, \quad x_2 \hat{=} t_B$

Lösung:

Vertauschen

$$5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 7$$
$$2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 3$$

$\rightarrow$

$$\div 2 \mid \; 2x_1 + 2 \cdot x_2 = 3$$
$$5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 7$$

$\rightarrow$

$$x_1 + x_2 = 1.5 \quad (* -5)$$
$$5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 7$$

$+$

$\rightarrow$

$$x_1 + x_2 = 1.5$$
$$0 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 = -1/2$$

$\Longrightarrow x_2 = 1/2$

Einsetzen $\longrightarrow$

$$x_1 + 1/2 = 1.5$$

$\Rightarrow x_1 = 1.$

$\Rightarrow$ eindeutige Lösung: $x_1 = 1, \; x_2 = 1/2$

Lineare Gleichung

Definition

Eine *lineare Gleichung* in den *Variablen* $x_1, \dots, x_n$ ist eine Gleichung, die in der Form

Konstanten

$$a_1 \cdot x_1 + \cdots + a_n \cdot x_n = b,$$

VARIABLEN

geschrieben werden kann. Dabei sind $a_1, \dots, a_n$ und b gegebene reelle Zahlen. (Koeffizienten).

Beispiel:

$$5 \cdot x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 = 6$$

$$5 \cdot x_1 + 3x_2 = -1 \cdot x_1 + 6 \Leftrightarrow 6x_1 + 3x_2 = 6$$

$$5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2^2 + \sin(x)^2 = 0$$ (keine lineare Gleichung)

Lineares Gleichungssystem

Definition

Ein *System linearer Gleichungen* in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist eine endliche Menge linearer Gleichungen in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$

$$
\begin{aligned}
a_{11} \cdot x_1 + \quad \cdots \quad + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\
&\vdots \\
a_{m1} \cdot x_1 + \quad \cdots \quad + a_{mn} \cdot x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \cdots + a_{2n}x_n = b_2$

m-te Gleichung →

wobei $a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ und $b_i \in \mathbb{R}, 1 \leqslant i \leqslant m$ feste Zahlen sind.

Bsp:

$$
\left.
\begin{aligned}
2x_1 + 3x_2 + 2 \cdot x_3 &= 1 \\
x_1 \qquad\quad + x_3 &= 5
\end{aligned}
\right\}
$$

lineares Gleichungssystem.

$\boxed{a_{13} = 2}$

Lösung eines GLS

Definition

Eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{array}{lll} a_{11} \cdot x_1 + & \cdots & + a_{1n} \cdot x_n & = b_1 \\ & \vdots & & \\ a_{m1} \cdot x_1 + & \cdots & + a_{mn} \cdot x_n & = b_m \end{array},$$

ist eine Liste

Wert den Variable x_1 annehmen soll.

$$(s_1, \ldots, s_n)$$

von reellen Zahlen, die alle m Gleichungen des Systems erfüllt.

Zentrale Fragen

- Ist ein gegebenes lineares GLS lösbar?
- Wie findet man gegebenenfalls eine Lösung?
- Wie beschreibt man alle Lösungen?

Matrix Notation, Koeffizientenmatrix, erweiterte Matrix

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & - & 2 \cdot x_2 & + & x_3 & = & 0 \\
 & & 2 \cdot x_2 & - & 8 \cdot x_3 & = & 8 \\
-4 \cdot x_1 & + & 5 \cdot x_2 & + & 9 \cdot x_3 & = & -9
\end{array}
$$

Koeffizientenmatrix:

$$
\begin{bmatrix}
1 & -2 & 1 \\
0 & 2 & -8 \\
-4 & 5 & 9
\end{bmatrix}
$$

Erweiterte Koeff.- Matrix

$$
\begin{bmatrix}
1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 2 & -8 & 8 \\
-4 & 5 & 9 & -9
\end{bmatrix}
$$

Beispiel

(s_1, s_2, s_3) Lösung GLS

(1)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2\cdot x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2\cdot x_2 & - & 8\cdot x_3 & = & 8 \\ -4\cdot x_1 & + & 5\cdot x_2 & + & 9\cdot x_3 & = & -9 \end{array}$$

(·4) +

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

neue erweiterte Koeff.-Matrix ?

(2)
$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

$5+4(-2)=-3$

$\Rightarrow$ (s_1, s_2, s_3) ist auch Lsg. von

Die Lösung von (1) und (2) sind identisch !

Beispiel

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 2 \cdot x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2 \cdot x_2 & - & 8 \cdot x_3 & = & 8 \\ & - & 3 \cdot x_2 & + & 13 \cdot x_3 & = & -9 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow (*1/2) \\ \\ \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & - & 2 \cdot x_2 & + & x_3 & = & 0 \\
 & & x_2 & - & 4 \cdot x_3 & = & 4 \\
 & - & 3 \cdot x_2 & + & 13 \cdot x_3 & = & -9
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{cccc}
1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 4 \\
0 & -3 & 13 & -9
\end{array}\right]
\begin{array}{l} \\ (*3) \\ + \end{array}
\Rightarrow
\left[\begin{array}{cccc}
1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 4 \\
0 & 0 & 1 & 3
\end{array}\right]
$$

Beispiel

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & - & 2 \cdot x_2 & + & x_3 & = & 0 \\
 & & x_2 & - & 4 \cdot x_3 & = & 4 \\
 & & & & x_3 & = & 3
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \ (*4) \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}
$$

Beispiel

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 2 \cdot x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & & & = & 16 \\ & & & & x_3 & = & 3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ (*2) \\ \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 32 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \\ *(-1) \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 29 \\ x_2 = 16 \\ x_3 = 3 \end{array}$$

Beispiel

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & = & 32 \\ & & x_2 & & & = & 16 \\ & & & & x_3 & = & 3 \end{array}$$

Beispiel

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= 29 \\ x_2 \qquad\quad &= 16 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Elementare Zeilenoperationen

1. (Ersetzen) Ersetze eine Gleichung (Zeile) durch die Summe von sich selbst und dem Vielfachen *einer anderen* Gleichung (Zeile)
2. (Vertauschen) Vertausche zwei Gleichungen (Zeilen)
3. (Skalieren) Multipliziere alle Koeffizienten einer Gleichung (Zeile) mit einer reellen Zahl $\neq 0$ (sprich: ungleich Null)

Elementare Zeilenoperationen: Theoretische Überlegungen

Satz 1

Nehmen wir an, das lineare Gleichungssystem entstand

$$\begin{array}{cccc} a'_{11} \cdot x_1 + & \cdots & a'_{1n} \cdot x_n & = b'_1 \\ & \vdots & & \\ a'_{m1} \cdot x_1 + & \cdots & a'_{mn} \cdot x_n & = b'_m \end{array} \tag{1}$$

durch eine endliche Folge elementarer Zeilenoperationen aus dem GLS

$$\begin{array}{cccc} a_{11} \cdot x_1 + & \cdots & a_{1n} \cdot x_n & = b_1 \\ & \vdots & & . \\ a_{m1} \cdot x_1 + & \cdots & a_{mn} \cdot x_n & = b_m \end{array} \tag{2}$$

(2) => (1)
(1) => (2)

Dann gilt das folgende: Eine Liste $(s_1, \ldots, s_n)$ *reeller Zahlen ist eine Lösung von* (1) *dann und nur dann, wenn* $(s_1, \ldots, s_n)$ *eine Lösung von* (2) *ist.*

Beweis:

$$GLS_1 \xrightarrow[\text{Zeilen op.}]{\text{elementare}} GLS_2$$

$(s_1, \dots, s_n)$ Lsg. von GLS_1 $\longrightarrow$ $(s_1, \dots, s_n)$ Lsg von GLS_2

Wenn wir dies für <u>eine</u> elementare Zeilenop bewiesen haben folgt auch $(s_1, \dots, s_n)$ Lsg. von GLS_k (k endlich)

1. Fall: vertauschen von Zeilen   trivial 

$(s_1, \dots, s_n)$ Lsg von GLS_1 $\Rightarrow$ $(s_1, \dots, s_n)$ Lsg von $GLS2$

2. Fall: Skalieren von Zeile i mit $\alpha \neq 0$.

GLS_2 ist identisch mit GLS_1 bis evtl. auf Zeile i.

i-te Zeile in GLS_2

$$(\alpha \cdot a_{i1})x_1 + (\alpha \cdot a_{i2})x_2 + \dots + (\alpha\, a_{in})\, x_n = \alpha \cdot b_i$$

Wenn $(s_1, \dots, s_n)$ Lösung von GLS_1, d.h.

$$a_{i1} s_1 + \dots + a_{in} s_n = b_i$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \cdot a_{i1} s_1 + \dots + \alpha\, a_{in} s_n = \alpha\, b_i$$

$\Rightarrow$ $(s_1, \dots, s_n)$ ist auch Lsg. von GLS_2.

3. Fall: elementare Zeilen op war Ersetzen der i-ten Zeile mit Summe der i-ten Zeile und dem Vielfachen ($\alpha \neq 0$) der j-ten Z.

GLS_2 ist identisch mit GLS_1 bis auf die i-te Zeile!

GLS_1: i-te Zeile $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$

j-te Zeile $a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n = b_j$

i-te Zeile von GLS_2:

$$(a_{i1} + \alpha a_{j1})x_1 + (a_{i2} + \alpha a_{j2})x_2 + \ldots + (a_{in} + \alpha a_{jn})x_n$$
$$= b_i + \alpha b_j$$

Wenn $(s_1, \ldots, s_n)$ Lösung von GLS_1

$\Rightarrow (a_{i1} + \alpha a_{j1})s_1 + \ldots + (a_{in} + \alpha a_{jn})s_n = b_i + \alpha b_j \Rightarrow (s_1, \ldots, s_n)$ Lösung von $GLS2$!

Frage: Wir haben bewiesen, dass wenn $(s_1, \dots, s_n)$ „Lösung" von GLS_1

$\Rightarrow (s_1, \dots, s_n)$ „Lösung" von GLS_2.

Wie beweisen wir „$\Leftarrow$"?

$$GLS_1 \xrightarrow[\text{Zeilenop.}]{\text{elementare}} GLS_2$$

existiert elementare Zeilenop.

$\square$