Heute (18.12.2014):

- Fragestunde
- Vorrechnen der Aufgaben Midterm 2013

Seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 18 \\ 13 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Für die Lösung $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ des Systems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gilt

- [x] $x_3 = 5$
- [ ] $x_3 = 2$
- [ ] $x_3 = 3$
- [ ] $x_3 = 1/2$

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18$

$x_1 + 2x_2 + 1x_3 = 13$ (−)

$x_3 = 5$

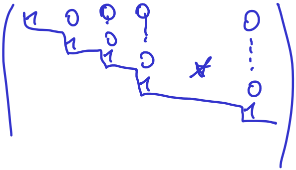
Aufgaben Midterm 2013

Sei R die reduzierte Zeilenstufenform der Matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt

- [ ] $r_{14} = 6$
- [x] $r_{14} = 5$
- [ ] $r_{14} = 3$
- [ ] $r_{14} = 2$



Aufgaben Midterm 2013

Seien

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -10 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} h+7 \\ 8 \\ 2h+1 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

Für welche Werte der reellen Zahl h liegt der Vektor $\mathbf{b}$ in der von $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ aufgespannten Ebene?

☐ $h = 2$ ☑ $h = 4$ ☐ $h = 1$ ☐ $h = -2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 4 & -10 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h+7 \\ 8 \\ 2h+1 \\ 25 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 25 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{l} x_1 = \frac{7}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

$h = 4$

Aufgaben Midterm 2013

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & \cdots & c_{n1} \\ \boxed{c_{12}} & & & \\ c_{1n} & \cdots & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Für die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(A \mid I) \xrightarrow{\text{elementare Z-Op.}} (I \mid A^{-1})$$

und $B = A^{-1}$ gilt

- [ ] $b_{21} = -1$
- [ ] $b_{21} = 2$
- [ ] $b_{21} = -2$
- [x] $b_{21} = -4$

Cramersche Regel

$Ax = b$ $\quad x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$

A_i Matrix mit i-ten Spalte ersetzt durch b

$$A\, b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b_{21} = \frac{\det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}} = -4$$

$$= \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = -4$$

$$= \det\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1$$

$$b_{11} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}}{\det(A)} = 3$$

Für die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

und $B = A^{-1}$ gilt

- ☐ $b_{21} = -1$
- ☐ $b_{21} = 2$
- ☐ $b_{21} = -2$
- ☐ $b_{21} = -4$

$$b_{11} = \frac{1}{\det(A)} C_{11} = \frac{1}{1} (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$$

Aufgaben Midterm 2013

Berechnen Sie die Determinante

$$d = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ -4 & 1 & -2 & -1 \\ -3 & -2 & -1 & -4 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

$+(*2)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ -3 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

Es gilt

- ☐ $d = -65$
- ☑ $d = -13$
- ☐ $d = 13$
- ☐ $d = 65$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -3 & -5 & 6 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} - (-3) \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 14 - 27 = -13$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ -3 & -2 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = (-1) \cdot 4$$

Aufgaben Midterm 2013

Gegeben die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 1 & 2 & 3 \\ -6 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ -12 & 12 & -5 & 0 & -2 \\ 9 & -8 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie die LU-Zerlegung von A (*ausschliesslich* durch Anwenden elementarer Zeilenoperationen, die ein Vielfaches einer Zeile auf eine andere, darunterliegende Zeile hinzuaddieren). Die Matrix L erfüllt:

☐ $l_{43} = 2$ ☑ $l_{43} = 3$ ☐ $l_{43} = 4$ ☐ $l_{43} = 0$

$$A=\begin{pmatrix}-3&2&0&1&-1\\3&-4&1&2&3\\-6&4&-1&2&1\\-12&12&-5&0&-2\\9&-8&1&4&2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-3&2&0&1&-1\\0&-2&1&3&2\\0&0&-1&0&3\\0&4&-5&-4&2\\0&-2&1&7&-1\end{pmatrix}$$

$$A=L\cdot U$$

$$A\cdot O\cdot O^{-1}\cdot I$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}-3&2&0&1&-1\\0&-2&1&3&2\\0&0&-1&0&3\\0&0&-3&2&6\\0&0&0&4&-3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-3&2&0&1&-1\\0&-2&1&3&2\\0&0&-1&0&3\\0&0&0&2&-3\\0&0&0&4&-3\end{pmatrix}$$

$$Ax=b$$

für verschiedene Rechte Seiten

$$x=A^{-1}\cdot b$$

$$L\cdot \underbrace{U\cdot x}_{y}=b$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}-3&2&0&1&-1\\0&-2&1&3&2\\0&0&-1&0&3\\0&0&0&2&-3\\0&0&0&0&3\end{pmatrix}=U$$

$$L=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\-1&1&0&0&0\\2&0&1&0&0\\4&-2&\boxed{3}&1&0\\-3&1&0&2&1\end{pmatrix}$$

$$Ly=b$$

$$Ux=y$$

Aufgaben Midterm 2013

Sei V ein Vektorraum der Dimension $\dim V = n$. Wenn S eine linear unabhängige Menge von Vektoren aus V ist, dann ist S eine Basis von V.

☐ *WAHR* ☒ *FALSCH*

Sei A eine $m \times n$ Matrix. Wenn die durch $\mathbf{x} \mapsto \boxed{A^T}\mathbf{x}$ definierte Matrixtransformation surjektiv ist, dann gilt $m \geq n$.

$B, \ T(x) = B \cdot x$

$\in \mathbb{R}^{m \times n}$ $n \geq m$

☒ *WAHR* ☐ *FALSCH*

Sei A eine $n \times n$ Matrix für $n \geqslant 5$. Wenn man die Matrix B durch Multiplizieren zuerst der dritten Zeile von A mit $\dfrac{1}{n}$ und dann der fünften Spalte mit $\dfrac{1}{n}$ erhält, dann gilt $\quad \det A = n^2 \det B$.

☑ *WAHR* ☐ *FALSCH*

Aufgaben Midterm 2013

Seien

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 4 & -3 & -2 & -1 \\ -4 & -1 & 1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

und $C = AB$. Dann gilt:

- ☐ $c_{31} = 1$
- ☐ $c_{31} = 2$
- ☑ $c_{31} = -2$
- ☐ $c_{31} = -1$

Wenn A eine quadratische Matrix ist und das lineare Gleichungssystem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ nur die triviale Lösung hat, dann ist A invertierbar.

☑ *WAHR* ☐ *FALSCH*

A ist $n \times n$ Matrix

A invertierbar $\iff$ Spalten von A lin. unabh. $\iff$ Zeilen sind lin. unabh.

$\iff$ $x \mapsto Ax$ ist bijektiv

$\iff$ $\det(A) \neq 0$

$\iff$ A^{-1} existiert

$\iff$ $\operatorname{Ker}(A) = \{\mathbf{0}\}$

$\iff$ A^T invertierbar

Aufgaben Midterm 2013

Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

hat eine QR-Zerlegung in eine orthogonale Matrix Q und eine obere Dreiecksmatrix R mit

- [ ] $R = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 5 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$
- [ ] $R = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- [ ] $R = \begin{pmatrix} 25 & -25 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$
- [x] $R = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$A = QR = Q \cdot \begin{pmatrix} \boxed{} & \\ 0 & \end{pmatrix}$

Norm von a_1

QR-Zerlegung

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}}}_{\frac{-25}{25} = -1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = 5$$

$$\left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = 5$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}}_{R}$$

Aufgaben Midterm 2013

Die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert $\lambda = 2$ der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

☐ 0 ☐ 1 ☐ 3 ☐ 2

Eigenraum zu $\lambda=2$

$$\dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 3-2 & 1 & -1 \\ -1 & 1-2 & 1 \\ 2 & 2 & 0-2 \end{pmatrix} = \dim \operatorname{Ker} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 3 - \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 2$$