Heute (16.12.2013):

Donnerstag $18^{\underline{00}}$

- Textbuch Kapitel 7.4
- Die Singulärwertzerlegung

Was ist ein Singulärwert?

$m\ \overset{n}{\boxed{\quad A \quad}}$ $\qquad A^T \cdot A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $A^T A$ ist symmetrisch und ist somit orthogonal diagonalisierbar.
- Eigenwerte $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$ zu orthonormalen Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n$,

Sei $\lambda \neq 0$ EW mit EV $v \neq 0$. z.z. $\lambda \geq 0$.

$$0 < (A \cdot v)^T (A \cdot v) = v^T \cdot A^T \cdot A \cdot v = v^T \cdot \lambda \cdot v = \lambda \cdot \underbrace{v^T v}_{>0} \quad \Rightarrow \lambda \geq 0$$

Definition

Die *Singulärwerte* einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sind die Wurzeln der Eigenwerte von $A^T A$:

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} \geqslant \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n = \sqrt{\lambda_n}$$

- ~~Singulärwert $\sigma_i = \|A\mathbf{v}_i\|$~~

Was ist die Singulärwertzerlegung?

$$A = \begin{array}{cc} & n \\ m & \boxed{} \end{array}$$

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- r maximaler Index mit $\sigma_r > 0$. Beobachtung: $\underline{r = \mathrm{Rang}(A)}$
- $D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times r}$
- Fülle mit 0 auf:

$$\Sigma = m\left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}^{n} \right. \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

$$A = U \, \Sigma \cdot V^T$$

wobei $\left.\begin{array}{l} U \in \mathbb{R}^{m \times n} \\ V \in \mathbb{R}^{n \times n} \end{array}\right\}$ orthonormal.

Was ist die Singulärwertzerlegung?

Satz 102

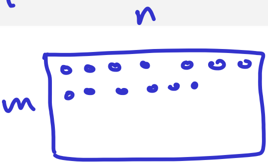
orthonormale Spalten.

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *eine Matrix mit* $\mathrm{Rang}(A) = r$. *Dann gibt es* ~~*orthogonale*~~ *Matrizen* $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *und* $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit*

$$\boxed{A = U\Sigma V^T.}$$

Wozu ist das gut?

$m \leq n$



- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$: $m \cdot n$ Zahlen in Speicher
- $\mathrm{Rang}(A) = r$:

$$\begin{pmatrix} u_1 \cdots u_m \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} \sigma_1 \ddots \sigma_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \, u_i \cdot v_i^T$$

$\Rightarrow$ Beschreibt A mit $\boxed{r \cdot (m+n)}$ Zahlen!

Einträge der Matrix

$\boxed{m \cdot n}$

Platz: $m \cdot n$

Koeffizienten.

Bsp. $r = \sqrt{m}$

$\boxed{\sqrt{m}\,(m+n) \ll m \cdot n}$

Bildkompression

- Graustufenbild: $A \in \mathbb{R}^{\cancel{m \times n}}$ (Speicherplatz:

  $m \times n$
- Berechne Singulärwertzerlegung

$$\boxed{A = U\Sigma V^T}$$

- Setze alle Singulärwerte $\sigma_k, \ldots, \sigma_r = 0$

$$A' = U\Sigma' V^T$$

- Neuer Speicherplatz:

n, 100

0, 10

m

100 K Zahlen.

$\Sigma = $ $\sigma_1 \ldots \sigma_k \ldots \sigma_r \ldots$ 0 0 0

$k \cdot (m+n)$

$m = 100$

$n = 1000$

$k = 50$ $\quad 50(1050)$

$= 21$ K Zahlen.

Beweis Satz 22

$A = m \boxed{}^{n}$, $r = \operatorname{rang}(A)$

$\underline{22:}$ $\exists$ orthonormale Matrizen $\underset{\in \mathbb{R}^{m\times m}}{U}, \underset{\in \mathbb{R}^{n\times n}}{V}$ $\quad A = U \cdot \left(\begin{array}{c|c} \sigma_1 \ddots \sigma_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) V^T$

$A^T \cdot A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal Diagonalisierbar.

$A^T \cdot A = V \cdot \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 \ddots \lambda_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) V^T$. Konstruiere $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$.

Betrachte $A \cdot v_1, \dots, A \cdot v_n$, $v_i^T \cdot A^T \cdot A \cdot v_j \quad i \neq j.$

$v_i^T \cdot \lambda_j \cdot v_j = 0$

Wähle Spalten von U als

$\underbrace{\frac{A v_1}{\|A \cdot v_1\|}}_{u_1}, \dots, \underbrace{\frac{A \cdot v_r}{\|A \cdot v_r\|}}_{u_r}$. und ergänze zu orthonormaler Basis von $\mathbb{R}^m$.

$u_1, \dots, u_r, \underbrace{u_{r+1}, \dots, u_m}_{\text{ergänzt}}$ $\Rightarrow$ orthonormale Basis des $\mathbb{R}^m$.

$u_j^T \cdot A \cdot v_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \text{ oder } i \geq r+1 \\ \sqrt{\lambda_j} & \text{sonst} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{U \cdot \left[\begin{array}{c|c} \sigma_1 \ddots \sigma_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] V^T}_{= A.}$