Heute (11.12.2013):

Cr pres   Mittwochabend.

- Textbuch Kapitel 7.3
- Quadratische Formen
- Optimierung unter Nebenbedingungen

Beispiel

- maximiere $9x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2$ mit Nebenbedingung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

? max $= 9$ und optimale Lsg.

$(1,0,0)$

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Maximierung und Minimierung von quadratischen Formen

Satz 99

Sei A eine symmetrische Matrix. Sei weiter

$$M = \max\{\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \; : \; \|\mathbf{x}\| = 1\} \qquad \textit{und} \qquad m = \min\{\mathbf{x}^T A\mathbf{x} \; : \; \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

Dann ist

- *M gleich dem größten Eigenwert von A und*
- *m gleich dem kleinsten Eigenwert von A.*

Für einen Einheitsvektor $\mathbf{x}$ gilt

- *$M = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ wenn $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert M ist und*
- *$m = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ wenn $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert m ist.*

Beweis $A = A^T \Rightarrow A$ ist orthogonal diagonalisierbar.

d.h. $\exists\, U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit orthonormalen Spalten und.

$A = U \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} U^T$ $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind Eigenwerte. , $U = (u_1 \dots u_n)$

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \geq \lambda_n$

$x^T \cdot A \cdot x$

$\|x\| = 1$

Schreibe x als LK der $u_1, \dots, u_n$: $x = \mu_1 \cdot u_1 + \dots + \mu_n \cdot u_n$.

Nun gilt $x^T \cdot A \cdot x = x^T (\lambda_1 \mu_1 u_1 + \lambda_2 \mu_2 u_2 + \dots + \lambda_n \mu_n u_n)$

$= (\mu_1 u_1 + \dots + \mu_n u_n)^T (\lambda_1 \mu_1 u_1 + \dots + \lambda_n \mu_n u_n)$

$= \sum_{i,j} \mu_i \lambda_j \mu_j \underbrace{u_i^T \cdot u_j}$

$= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i=j}}^{n} \lambda_j \mu_i \mu_j = \boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i^2}$

ist maximal, wenn

$\mu_1 = 1, \mu_2 = \dots = \mu_n = 0$

falls $\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \geq \lambda_n$

d.h. $\max = \lambda_1$

$\Rightarrow u_1$ ist opt. Lsg

$\|x\| = 1 \iff \|x\|^2 = 1 \iff x^T \cdot x = 1 \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i$

$\Rightarrow x^T x = \sum_i \mu_i^2 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \iff \sum \mu_i^2 = 1.$

Genauso sieht man

$\min_{\|x\|=1} x^T \cdot A \cdot x = \lambda_n$ der kleinste Eigenwert!

Beispiel

Rezept: Bestimme Vektor mit Norm 1 aus Eigenraum zum Eigenwert 6.

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $A^T = A$
- Bestimme eine Lösung von $\max\{x^T A x : x \in \mathbb{R}^3, \|x\| = 1\}$.
- Char. Poly. $-\lambda^3 + 10\lambda^2 - 27\lambda + 18 = -(\lambda - 6)(\lambda - 3)(\lambda - 1)$

$$\mathrm{Ker}\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

x_3 ist frei: $x_2 = x_3$, $x_1 + x_3 - 2x_3 = 0$, $x_1 = x_3$ $\quad u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} / \sqrt{3}$

Analog: Min $= 1$ . . . .

Zweitgrößter Eigenwert

$u_1, \ldots, u_n$ sind orthonormale Vektoren.
u_i ist EV zum EW λ_i

Satz 100

Sei A eine symmetrische Matrix, λ_1 der größte Eigenwert von A und $\mathbf{u}_1$ der dazugehörige Eigenvektor. Dann ist das

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max \quad \mathbf{x}^T A \mathbf{x} & \textit{mit} \\ \mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1, & \mathbf{x}^T \mathbf{u}_1 = 0 \end{array}}$$

der zweitgrößte Eigenwert λ_2 von A. Das Maximum wird angenommen wenn $\mathbf{x}$ der normierte Eigenvektor zu λ_2 ist.

Beweis: $x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i$

$x \perp u_1 \ (x^T \cdot u_1 = 0)$
$\Leftrightarrow \mu_1 = 0$

$\boxed{x^T \cdot x = 1 \text{ und } x^T \cdot u_1 = 0} \Leftrightarrow \boxed{\mu_1 = 0 \quad \sum_{i=2}^{n} \mu_i^2 = 1}$

Beweis

$$x^T \cdot A \cdot x = \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i\right)^T \cdot A \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i u_i\right)^T \cdot \sum_{i=1}^{n} \mu_i \underbrace{A \cdot u_i}_{\lambda_i \cdot u_i}$$

$u_1^T \cdot A \cdot u_1$
$= u_1^T \cdot \lambda_1 \cdot u_1$
$= \lambda_1 \cdot \underbrace{u_1^T \cdot u_1}_{1}$

$$\boxed{\alpha \le \beta,\ h \ge 0 \Rightarrow \alpha \cdot h \le \beta \cdot h}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (\mu_i u_i)^T (\lambda_j \mu_j u_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i^2 \ \boxed{\le \lambda_1} \quad \text{da } \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = 1$$

und λ_1 wird angenommen von $x = u_1$ ∎

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underline{\mu_i^2} \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_1 \cdot \mu_i^2 = \lambda_1$$

Beispiel

- Bestimme $\max\{9x_1^2 + 4x_2^2 + 3x_3^2 \colon x \in \mathbb{R}^3, \|x\| = 1, \underline{x_1 = 0}\}$

$\max\limits_{\substack{\|x\|=1 \\ x_1=0}} x^T \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} x$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist EV. zum EW 9

Die Bedingung $x_1 = 0 \iff x \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \max = 4$. angenommen an $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Beispiel

$\lambda_1 = 6, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 1$

- $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
- Bestimme den maximalen Wert der quadratischen Form $x^T Ax = 0$ unter den Nebenbedingungen $\underline{x^T x = 1}$ und $\underline{u_1^T x = 0}$, wobei $\underline{u_1}$ Eigenvektor zum grössten Eigenwert von A ist.

$\underline{\max = 3.}$

$\operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lösung: $\dfrac{u_2}{\|u\|_2} = \dfrac{u_2}{\sqrt{6}}$

Satz 101

Sei A eine symmetrische $n \times n$ Matrix. Sei $A = PDP^{-1}$ eine orthogonale Diagonalisierung von A wobei die Diagonalelemente von D mit $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ geordnet sind und die Spalten von P die zugehörigen normierten Eigenvektoren $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ sind. Dann gilt für $k = 2, \ldots, n$

$$\boxed{\begin{array}{l} \max \quad \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \qquad \textit{mit} \\ \mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1, \quad \mathbf{x}^T \mathbf{u}_1 = 0, \quad \ldots \quad \mathbf{x}^T \mathbf{u}_{k-1} = 0 \end{array}}$$

ist der Eigenwert λ_k und das Maximum wird angenommen für $\mathbf{x} = \mathbf{u}_k$.

Verallgemeinerung

Satz 101

Sei A eine symmetrische $n \times n$ Matrix. Sei $A = PDP^{-1}$ eine orthogonale Diagonalisierung von A wobei die Diagonalelemente von D mit $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ geordnet sind und die Spalten von P die zugehörigen normierten Eigenvektoren $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ sind. Dann gilt für $k = 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} &\max \quad \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \qquad \textit{mit} \\ &\mathbf{x}^T \mathbf{x} = 1, \quad \mathbf{x}^T \mathbf{u}_1 = 0, \quad \ldots \quad \mathbf{x}^T \mathbf{u}_{k-1} = 0 \end{aligned}$$

ist der Eigenwert λ_k und das Maximum wird angenommen für $\mathbf{x} = \mathbf{u}_k$.

Verallgemeinerung

$P^T = P^{-1}$

Satz 101

Sei A eine symmetrische $n \times n$ Matrix. Sei $A = PDP^{-1}$ eine orthogonale Diagonalisierung von A wobei die Diagonalelemente von D mit $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ geordnet sind und die Spalten von P die zugehörigen normierten Eigenvektoren $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ sind. Dann gilt für $k = 2, \ldots, n$

$$\max \quad \mathbf{x}^T A \mathbf{x} \qquad \textit{mit}$$

u.d.N. $$\mathbf{x}^T\mathbf{x} = 1, \quad \mathbf{x}^T\mathbf{u}_1 = 0, \quad \ldots \quad \mathbf{x}^T\mathbf{u}_{k-1} = 0$$

ist der Eigenwert λ_k und das Maximum wird angenommen für $\mathbf{x} = \mathbf{u}_k$.