Lineare Algebra

Heute (09.12.2013):

- Textbuch Kapitel 7.1, 7.2, 7.3
- Wiederholung Diagonalisierung symmetrischer Matrizen
- Quadratische Formen

Symmetrische Matrizen sind orthogonal diagonalisierbar

Erinnerung: Satz

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist orthogonal diagonalisierbar genau dann, wenn A symmetrisch ist.

diagonalisierbar: $\exists P, D$: $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

orthogonal — " — : P orthogonale Matrix $(P^T = P^{-1})$

Ziel: $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ mit P orthogonal

Finde eine orthogonale Diagonalisierung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

char. Polynom A:

$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 7)^2 (\lambda + 2) \stackrel{!}{=} 0$

$v_3^T \cdot v_1 = 0$

$v_3^T \cdot v_2' = 0$

$\lambda_1 = 7 \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_2 = -2 \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix}$

orthogonalisieren: $v_2 - \frac{v_2^T v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 1 \\ 1/4 \end{bmatrix} = v_2'$

$\Downarrow$

normieren: $u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{18} \\ 4/\sqrt{18} \\ 1/\sqrt{18} \end{bmatrix} \quad u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 7 & & 0 \\ & 7 & \\ 0 & & -2 \end{bmatrix}$

Der Spektralsatz

Satz 74

Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ hat die folgenden Eigenschaften:

a) *A hat n reelle Eigenwerte (Vielfachheit mitgezählt!).*

b) *Die Dimension des Eigenraums zum Eigenwert λ ist die algebraische Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms.*

c) *Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten sind paarweise orthogonal zueinander.*

d) *A ist orthogonal diagonalisierbar.*

Die Spektralzerlegung

- Sei $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$, wobei $P = (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n)$ ~~orthonormal~~ orthogonal und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die dazugehörigen Eigenwerte.
-

$$A = (\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n^T \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda_1 u_1, \ldots, \lambda_n u_n) \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_n^T \end{pmatrix}$$

$$\boxed{Ax = \lambda_1 u_1 u_1^T x + \ldots + \lambda_n u_n u_n^T x}$$

$$= \lambda_1 \underline{u_1 u_1^T} + \ldots + \lambda_n u_n u_n^T$$

Matrizen (Projektionsmatrizen)

(insbesondere Rang 1)

$$\begin{matrix} a & & a^T \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [a_1 \ldots a_n]$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_1 & \ldots & a_1 \cdot a_n \\ \vdots & & \\ a_n a_1 & \ldots & a_n a_n \end{bmatrix}$$

$a_1 a^T$

$a_n a^T$

Beispiel

Konstruiere eine spektrale Dekomposition von

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

$u_1 \qquad u_2$

$$A = 8 \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}}_{u_1 \cdot u_1^T} + 3 \underbrace{\begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}}_{u_2 u_2^T}$$

$$= 8 \, \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + 3 \, \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Quadratische Form

Definition

Eine *quadratische Form* ist eine Funktion $Q\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die als

$$Q(x) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$$

geschrieben werden kann.

Bspl $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$Q(x) = Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x^T \cdot A x = 2x_1^2 + 3x_2^2$$

O.B.d.A ist A symmetrisch

Bsp:
$$Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = 9x_1^2 + 4x_1x_2 + 7x_1x_3 - 2x_2^2$$

Möchte: $x^T \cdot A \cdot x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 2 & 7/2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 7/2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

mit A symmetrisch

$$= 9x_1 \cdot x_1 + 2x_1 \cdot x_2 + 2x_2 \cdot x_1$$
$$+ 7/2\, x_1 \cdot x_3 + 7/2\, x_3 \cdot x_1 + -2x_2x_2 + 0 \ldots$$

Substitution

- Betrachte $Q(x) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ mit symmetrischer Matrix A
- $A = PDP^T$ orthogonale Diagonalisierung
- Substituiere $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ oder $\mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x}$
- $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T D\mathbf{y}$.

$$x^T A x = x^T P \cdot D \cdot P^T \cdot x = (P^T x)^T \cdot D \cdot (P^T x) = y^T D y$$

hier gibt es keine gemischten Terme mehr ☺

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$

$$Q\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = x^T \cdot A \cdot x = x_1^2 - 8x_1x_2 - 5x_2^2$$

EW von A:

$\lambda_1 = 3 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -7 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$

$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ mit $P = [v_1 \ v_2]$

$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$

Substitution $\boxed{x = Py}$ $(y = P^{-1}x = P^T x)$

$$x^T A x = y^T D y = \underbrace{3y_1^2 - 7y_2^2}$$

↳ nur noch Quadrate

Quiz: $\max\limits_{\|y\|=1} 3y_1^2 - 7y_2^2$

Geboten:

0

$\boxed{3}$

7

Satz 75

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Es existiert eine orthogonale Matrix P so dass die Substitution $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ die quadratische Form $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ in eine quadratische Form $\mathbf{y}^T D\mathbf{y}$ überführt, wobei D eine Diagonalmatrix ist.

- Die Spalten von P heißen *Hauptachsen*.

Beispiel

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

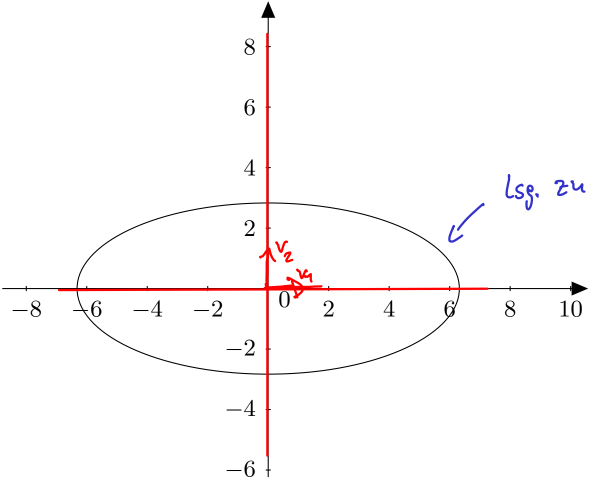
$\lambda_1 = 1 \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Spalten von P

$\lambda_2 = 5 \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Hauptachsen!

- $x_1^2 + 5x_2^2 = 40$

$= x^T A x$



Lsg. zu $x_1^2 + 5x_2^2 = 40$

$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

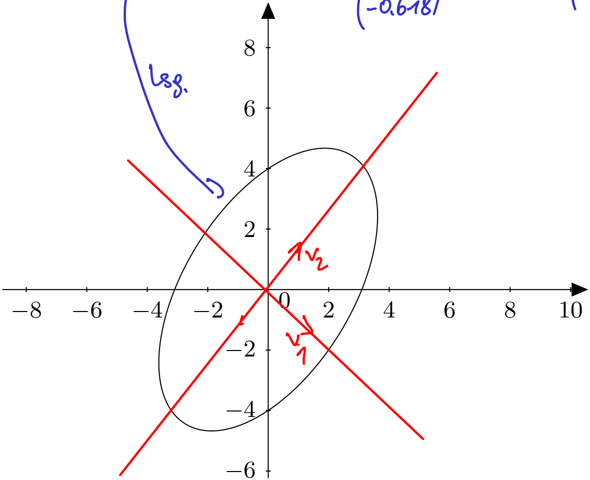
$\lambda_1 = 4 + \sqrt{5}$ $\quad \lambda_2 = 4 - \sqrt{5}$

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2(1-\sqrt{5}) \end{bmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ -0.618 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2(1+\sqrt{5}) \end{bmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 \\ 1.618 \end{pmatrix}$

$x^T \cdot A \cdot x =$

- $5x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 48$

Lsg.



Klassifikation quadratischer Formen

Definition

Eine quadratische Form $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ ist

a) *positiv definit*, wenn $Q(\mathbf{x}) > 0$ für alle $\mathbf{x} \neq 0$

b) *negativ definit*, wenn $Q(\mathbf{x}) < 0$ für alle $\mathbf{x} \neq 0$

c) *indefinit*, wenn $Q(\mathbf{x})$ sowohl positive als auch negative Werte annehmen kann

d) *positiv semidefinit*, wenn $Q(\mathbf{x}) \geqslant 0$ für alle $\mathbf{x}$

e) *negativ semidefinit*, wenn $Q(\mathbf{x}) \leqslant 0$ für alle $\mathbf{x}$

Satz 76

Die quadratische Form $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ ist

a) *positiv definit, wenn alle Eigenwerte von A echt positiv sind.*

b) *negativ definit*, wenn alle EW von A echt negativ sind

c) *indefinit*, wenn A sowohl positive als auch negative EW hat.

Beweis: $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ mit $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$, Substitution $x = Py$

$x^T A x = y^T D y = \underline{\lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2}$

wenn alle $\lambda_i > 0 \Rightarrow x^T A x > 0$ für alle $x \neq 0$

— " — $\lambda_i < 0 \Rightarrow x^T A x < 0$ — " —

$\exists\, \lambda_i \geq 0,\ \lambda_j \leq 0$

$x^T A x \geq 0$ für $x = P \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$

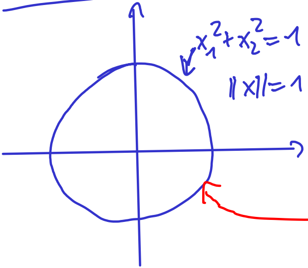
$x^T A x \leq 0$ für $x = P \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$ ∎

Optimierung von Quadratischen Formen mit Nebenbedingung

Problem: maximieren/minimieren $x^T A x$

mit Nebenbedingung $\|x\| = 1$

Domain:



max/min $x^T A x$

für alle diese x