ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Lineare Algebra

Heute (4.12.2013):

- Textbuch Kapitel 7.1, 7.2
- Diagonalisierung symmetrischer Matrizen
- Quadratische Formen

$A^T = A$: symmetrisch

$A = P \cdot \overset{\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}}{\overset{\shortparallel}{D}} \cdot P^T$, wobei Spalten von P orthonormal

$P = (v_1 \dots v_n)$

$\boxed{A \cdot v_i = d_i \cdot v_i}$

$P^T v_i = e_i$, $D \cdot P^T \cdot v = d_i \cdot e_i$

Symmetrische Matrizen

Definition

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist *symmetrisch*, wenn

$$A^T = A.$$

Bsp.:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 5 & 2 & 1 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Symmetrische Matrizen

Diagonalisierung

char-Poly: $\det(A-\lambda I)$

Falls möglich, diagonalisiere die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Char. Poly.: $-\lambda^3 + 17\lambda^2 - 90\lambda + 144 = \boxed{-(\lambda-8)(\lambda-6)(\lambda-3)}$

Ziel: Basis aus orthonormalen Eigenvektoren berechnen.

Eigenwerte: $\boxed{8,6,3}$

$$\ker \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

8: ker:

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = P_1$$

6:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

x_3 ist frei:

$$x_2 = -\frac{1}{2} x_3$$

$$x_1 = -\frac{1}{2} x_3$$

$$\operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Ker}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zufall?

3.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = x_3$$

$$x_1 = x_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = p_3$$

Eigenvektoren sind orthogonal.

$$A \cdot (p_1, p_2, p_3) = (8 \cdot p_1, 6 \cdot p_2, 3 \cdot p_3)$$

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 8 \cdot \|p_1\|^2 & & 0 \\ & 6 \cdot \|p_2\|^2 & \\ 0 & & 3 \cdot \|p_3\|^2 \end{pmatrix}$$

$$p_i' = \frac{p_i}{\|p_i\|}$$

$$A = P'^T \cdot \begin{pmatrix} 8 & & 0 \\ & 6 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix} \cdot P'$$

$$\boxed{P' = (p_1', p_2', p_3')}$$

P' hat orthonormale Spalten!

Symmetrische Matrizen, verschiedene Eigenwerte

Satz 94
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix. Sind $\mathbf{v}$ und $\mathbf{u}$ Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten, dann sind $\mathbf{v}$ und $\mathbf{u}$ orthogonal.

Beweis: Sei $A \cdot v = \alpha \cdot v$, $A \cdot u = \beta \cdot u$ mit $\alpha \neq \beta$. z.z. $v^T \cdot u = 0$

Sei o.B.d.A. $\alpha \neq 0$

$$\left(\frac{A \cdot v}{\alpha}\right)^T \cdot u = \frac{1}{\alpha} v^T \cdot A^T \cdot u$$
$$= \frac{1}{\alpha} v^T \cdot A \cdot u$$
$$= \frac{\beta}{\alpha} \cdot v^T \cdot u$$

Da $\frac{\beta}{\alpha} \neq 1$ gilt somit $v^T \cdot u = 0$ ∎

$$\boxed{A = M \cdot D \cdot M^{-1}}$$

$$A = \underline{P} \cdot D \cdot \underline{P^T}$$

<u>Übung:</u>

auch hier sind Spalten von M Eigenvektoren!

$$\underline{P^T = P^{-1}}$$

das ist das neue!

Orthogonal diagonalisierbare Matrizen

Definition

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist *orthogonal diagonalisierbar*, wenn es eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt gibt mit $A = PDP^T$.

orthonormal:

Bsp von orthn

$$\left(\frac{p_1}{\|p_1\|}, \frac{p_2}{\|p_2\|}, \frac{p_3}{\|p_3\|} \right) = P.$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & & 0 \\ & 6 & \\ 0 & & 8 \end{pmatrix}$$

Symmetrische Matrizen sind orthogonal diagonalisierbar

Satz 95

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist orthogonal diagonalisierbar genau dann, wenn A symmetrisch ist. $\Leftarrow$

<u>Beweis:</u> „$\Rightarrow$" trivial. $A = P \cdot D \cdot P^T$ mit Diagonalmatrix D und $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann gilt $A^T = (P \cdot D \cdot P^T)^T = (P^T)^T \cdot D^T \cdot P^T$

$$= P \cdot D \cdot P^T$$

$$= A$$

d.h. A ist symmetrisch.

Symmetrische Matrizen sind orthogonal diagonalisierbar

Satz 95

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist orthogonal diagonalisierbar genau dann, wenn A symmetrisch ist.

"$\Leftarrow$" Erfolgt in zwei Schritten. 1. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch $\Rightarrow$ A hat nur reelle Eigenwerte. 2. Sei $v \in \mathbb{R}^n$ Eigenvektor zu reellem Eigenwert λ. O.B.d.A. $\|v\| = 1$. Ergänze v mit $u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ zur orthonormalen Matrix $O = (v, u_2, u_3 \ldots u_n)$

Ziel: $P^T \cdot A \cdot P = D$

$$(O^T \cdot A \cdot O)_{1,j} = \begin{cases} v^T \cdot A \cdot v = \lambda & j = 1 \\ u^T \cdot A \cdot u_j = v^T \cdot A^T \cdot u_j = \lambda \cdot v^T \cdot u_j = 0 \end{cases}$$

$$(O^T \cdot A\, O)_{j,1} = \begin{cases} \lambda & \text{falls } j = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$O^T \cdot A \cdot O = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & & \\ 0 & & H & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

Induktion $\Rightarrow$ $\exists\ Q \in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}$ orthonormal mit

$$\underline{Q^T} \cdot H \cdot \underline{Q} = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \tilde{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{bmatrix}$$

Wir wissen

$$O^T \cdot A \cdot O = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{H} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \qquad \tilde{Q} \text{ orthonormal}$$

<u>gesucht:</u> orthonormale $n \times n$-Matrix $\tilde{Q}$ mit

$$\tilde{Q}^T \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boxed{H} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tilde{Q} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

d.h. $\underline{\tilde{Q}^T \cdot O^T} \cdot A \cdot \underline{O \cdot \tilde{Q}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

<u>Blatt 2.2:</u> $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch $\Rightarrow$ A hat nur reelle Eigenwerte!

Annahme A hat komplexen Eigenwert $\boxed{(\alpha + \beta \cdot i) \quad \text{mit } \beta \neq 0}$

EV dazu sei $v = u + i \cdot w$ mit $u, w \in \mathbb{R}^n$.

$$A \cdot v = (\alpha + \beta \cdot i) \cdot v. \quad \Rightarrow \quad A \cdot u = \alpha \cdot u - \beta \cdot w$$

$$A(u + i \cdot w) = (\alpha + \beta i)(u + i \cdot w)$$

$$= \alpha u - \beta w + i(\beta u + \alpha w)$$

$$\Rightarrow \underline{(A - \alpha \cdot I) u = -\beta w}$$

$$A \cdot w = \beta \cdot u + \alpha \cdot w$$

$$\underline{(A - \alpha \cdot I) w = \beta \cdot u}$$

$$0 \leq \beta \underbrace{w^T \cdot w}_{>0} \cdot \beta = -u^T \cdot (A - \alpha \cdot I)^T \cdot w \cdot \beta$$

$$= -u^T (A - \alpha \cdot I) \cdot w \cdot \beta = -\beta^2 \cdot u^T \cdot u \leq 0$$

$\Rightarrow \beta = 0 \quad \Rightarrow$ nur reelle Eigenwerte!

Beispiel

Finde eine orthogonale Diagonalisierung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

<u>Schritt 1:</u> Bestimme Eigenwerte.

<u>Schritt 2:</u> Bestimme orthonormale Basen der Eigenräume der zuvor bestimmten Eigenwerte.

<u>Schritt 3:</u> Füge diese Basen als Spalten von P ein und "Achte" auf Ordnung