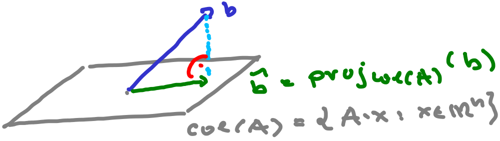
Heute (02.12.2013):

- Textbuch Kapitel 6.5, 7.1
- Problem der kleinsten Quadrate und die QR Zerlegung
- Diagonalisierung symmetrischer Matrizen

$Ax = b$ keine Lsg. **Ziel:** Finde $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit

$\|b - A x^*\|$ minimal.



Lösungsmenge des kleinste-Quadrate Problem:

$\{x^* \in \mathbb{R}^n : A \cdot x^* = \hat{b}\}$

Wiederholung: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ lin. unabh. Spalten. Gram-Schmidt:

$A = Q \cdot R$, $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit orthonormalen Spalten.

$R = \begin{pmatrix} \diagdown & \\ 0 & \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ obere D.M. mit echt positiven Diagonaleinträgen.

$$\boxed{\mathrm{proj}_{col(A)}(b) = Q \cdot Q^T \cdot b}$$

Notiz: $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ lin. unabh. Spalten, dann ist die eindeutige Lösung des k.Q.P.: Lösg von $\underline{A\cdot x =} \; Q \cdot Q^T \cdot b$

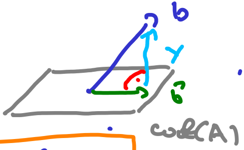
da $A = Q\cdot R$:

$$Q\cdot R\cdot x = Q\cdot Q^T\cdot b$$
$$I\cdot R\cdot x = I\cdot Q^T\cdot b$$
$$x = R^{-1}\cdot Q^T\cdot b$$

Satz 91

Die Menge der Lösungen des Problems der kleinsten Quadrate ist die Menge der Lösungen des Gleichungssystems

$$\boxed{A^T A x = A^T b \quad (I)}$$



Beweis: $\boxed{b = \hat{b} + y}$ mit $\hat{b} \in col(A)$, $y \in col(A)^\perp$ eindeutige Zerlegung.

Wir wissen: Lsg. des k.Q.P. sind Lösungen von $\boxed{A \cdot x = \hat{b} \; (II)}$

Für M_1, M_2 Lösungsmengen von (I) und (II) gilt

z.z. $M_1 = M_2$. $\boxed{\text{„}\subseteq\text{"}}$ Sei $x^* \in M_1$. z.z. $A \cdot x^* = \hat{b}$. Dazu reicht es z.z., dass $y^* = b - A \cdot x^*$ orthogonal zu col(A). $b = \underbrace{A \cdot x^*}_{\in col(A)} + y^*$

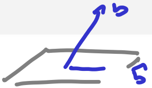
Aber: $A^T \cdot y^* = A^T \cdot b - A^T \cdot A \cdot x^* = 0$

$\boxed{\text{„}\supseteq\text{"}}$ Sei x^* eine Lösung von (II) z.z. x^* Lösg. von (I).

$A \cdot x^* = \hat{b}$. $A^T \cdot A \cdot x^* = A^T \cdot \hat{b} = A^T(\hat{b} + y) = A^T \cdot b$ ■

Beispiel

Löse das k.Q.p. $\min\limits_{x \in \mathbb{R}^4} \|A \cdot x^* - b\|$



Löse

$A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot b$ (Arbeit)

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Beobachtung} \\ a_1 \text{ ist LK. von } a_2, \dots, a_4 \\ a_2, a_3, a_4 \text{ orthogonal.}\end{array}}$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4. \end{array} \end{array} \qquad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A \cdot x^* = \hat{b}$

$\operatorname{proj}_{\operatorname{col}(A)} b = c_2 \cdot a_2 + c_3 a_3 + c_4 \cdot a_4$

$c_2 = \dfrac{a_2 \cdot b}{a_2 a_2} = -2$

$c_3 = 1$, $c_4 = 3$

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Eine Lsg ist folglich $x^* = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ -2 - x_1 \\ 1 - x_1 \\ 3 - x_1 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Beispiel

Standardmethode:

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lös:

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$x_2 = -2 - x_1$

$x_3 = 1 - x_1$

$x_4 = 3 - x_1$

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

Wann existiert eine eindeutige Lösung

Satz 92

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent.

a) *Das Problem der kleinsten Quadrate hat für jedes $b \in \mathbb{R}^m$ eine eindeutige Lösung.*

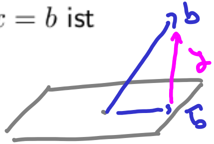
b) *Die Spalten von A sind linear unabhängig.*

c) *Die Matrix $A^T A$ ist invertierbar.*

Der Fehler

Definition

Der *Fehler des kleinste Quadrate Problems* für $Ax = b$ ist



$$\|y\| = \|b - \mathbf{proj}_{\mathrm{Col}(A)} b\|$$

Beispiel:
Betrachte das Beispiel von vorher:

$$\|b - \hat{b}\| = \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4+16+64} = \sqrt{84}$$

$$\hat{b} = A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 17 & 1 & 19 \\ -84 & 0 & -84 \end{array}\right)$$

Der Fehler des k.Q.P. ist:

$\hat{b} = A \cdot x^*$ mit x^* Lsg von $A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot b$ $\Leftrightarrow$ $x_1 = 1$, $x_2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 19 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Das k.Q.P. und die QR-Zerlegung

Satz 93

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *mit linear unabhängigen Spalten und sei* $A = QR$ *eine QR-Faktorisierung von* A*, wie in Satz 90. Dann ist die eindeutige Lösung des k.Q.P. für* $Ax = b$

$$\hat{\mathbf{x}} = R^{-1}Q^T b.$$

Finde die Lösung des k.Q.P. für $Ax = b$ mit

$A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5/2 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\overline{2} \quad \overline{2} \quad \overline{2}$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \\ a_1 \quad a_2 \quad a_3 \end{array}, \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Orthonormale Q

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

G-S-Orthogonalisierung:

$v_1 = a_1, \quad v_2 = a_2 - \underline{\mu_2} \cdot v_1$

$$= a_2 - \frac{a_2 \cdot v_1}{v_1 v_1} \cdot v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{8}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = a_3 - \frac{a_3 v_1}{v_1 v_1} v_1 - \frac{a_3 v_2}{v_2 v_2} v_2$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{10}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$R \cdot \hat{x} =$

$$Q^T \cdot b = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$R \cdot \hat{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$\hat{x}_3 = 2$

$\hat{x}_2 = -6, \quad \hat{x}_1 = 10$