Heute (27.11.2014):

- Orthogonale/Orthonormale Basen
- Orthogonale Projektion
- Kleinste Quadrate

Orthogonale/Orthonormale Basis

Definition

Sei $M = \{u_1, \dots, u_k\}$ eine Menge von Vektoren im $\mathbb{R}^n$.

i) M ist eine *orthogonale* Menge, wenn für jedes Paar $u_i \cdot u_j = 0$ $(i \neq j)$.

ii) M ist eine *orthonormale* Menge, wenn sie orthogonal ist und alle u_i Einheitsvektoren sind. $\|u_i\| = 1$

iii) M ist eine *orthogonale Basis*, wenn sie orthogonal ist und eine Basis ist.

iv) M ist eine *orthonormale Basis*, wenn sie orthonormal ist und eine Basis ist.

Projektion auf orthogonale Basis

Satz 82

Sei $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ *eine orthogonale Basis des Unterraums* $V \subseteq \mathbb{R}^n$*. Für jedes* $\mathbf{v} \in V$ *seien* $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ *die Gewichte in der Linearkombination*

$$\mathbf{v} = \underline{c_1}\mathbf{u}_1 + \cdots + \underline{c_k}\mathbf{u}_k. \qquad v \in \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_k\}$$

Dann sind die Gewichte bestimmt durch

$$\boxed{c_j = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_j}{\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_j}} \qquad (j = 1, \ldots, k).$$

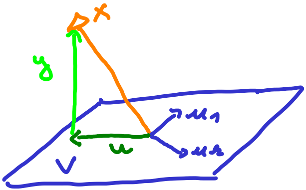
<u>Beweis:</u> $v = c_1 u_1 + \cdots + c_k u_k.$

$$v \cdot u_i = \underbrace{c_1 \cdot u_1 \cdot u_i}_{=0} + \cdots + c_i \cdot u_i \cdot u_i + \cdots + c_k \cdot \underbrace{u_k \cdot u_i}_{=0}$$

$$\Rightarrow \quad c_i = \frac{v \cdot u_i}{u_i \cdot u_i}$$

~~Beweis~~ Bild 1)

$V \subseteq \mathbb{R}^n$
aufgespannt durch
orthogonale $u_1, \dots, u_k$
$\{u_1, \dots, u_k\}$ lin. unabh.



$u_i \cdot u_j = 0 \quad \forall i \neq j$

$x \in \mathbb{R}^n$ beliebig.

$$\boxed{u = \frac{x \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} \cdot u_1 + \dots + \frac{x \cdot u_k}{u_k \cdot u_k} \cdot u_k}$$

- Ergänze $u_1, \dots, u_k$ mit $u_{k+1}, \dots, u_n$ zu orthogonaler Basis des $\mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$x = \underbrace{\frac{x \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \dots + \frac{x \cdot u_k}{u_k \cdot u_k} \cdot u_k}_{= u \,\in\, \operatorname{span}\{u_1, \dots, u_k\}} + \underbrace{\frac{x \cdot u_{k+1}}{u_{k+1} \cdot u_{k+1}} \cdot u_{k+1} + \dots + \frac{x \cdot u_n}{u_n \cdot u_n} u_n}_{\perp \langle u_1, \dots, u_k \rangle = y}$$

$\boxed{m \geq n}$

$\cancel{m \leq n}$

$A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Satz 83

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Die Spalten von A sind orthonormal genau dann wenn $A^T A = I$.

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} a_1^T \\ \vdots \\ a_n^T \end{pmatrix} (a_1, \ldots a_n)$$

$$(A^T \cdot A)_{ij} = a_i^T \cdot a_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\blacksquare$

Satz 84

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit orthonormal Spalten und $x, y \in \mathbb{R}^n$. Es gilt

i) $\|Ax\| = \|x\|$, Pythagoras.

ii) $(Ax) \cdot (Ay) = x \cdot y$,

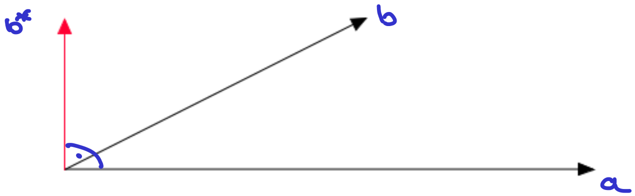
iii) $(Ax) \cdot (Ay) = 0$ *genau dann wenn* $x \cdot y = 0$.

i) $\|A \cdot x\|^2 = x^T \cdot \underbrace{A^T \cdot A}_{= I} \cdot x = x^T \cdot x = \|x\|^2$

ii) ähnlich.

iii) trivial.

Orthogonale Projektion



$b^* = b - \mu \cdot a$ $\qquad \mu = \frac{b \cdot a}{a \cdot a}.$

Siehe Bild 1. mit $W = V$

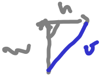
Satz 85

Sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Jeder Vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ kann eindeutig in der Form

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z} \quad \textit{mit} \quad \hat{\mathbf{y}} \in W, \mathbf{z} \in W^{\perp}$$

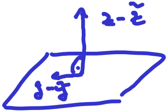
geschrieben werden.

Ist zumal $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ eine orthogonale Basis von W, dann ist



$\|v\|^2 = \|h^2\| + \|w\|^2$

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y}^T\mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1^T\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 + \cdots + \frac{\mathbf{y}^T\mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p^T\mathbf{u}_p}\mathbf{u}_p$$



und $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$.

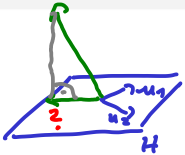
Beweis: Siehe Bild 1) . zu Eindeutigkeit.

Annahme $\exists\, \tilde{y} \in W$, $\tilde{y} \neq \hat{y}$, $\tilde{z} \in W^{\perp}$ mit $y = \tilde{y} + \tilde{z}$

$0 = y - y = \hat{y} - \tilde{y} + z - \tilde{z}$ ↯ zu Pythagoras.

Beispiel

- $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},$



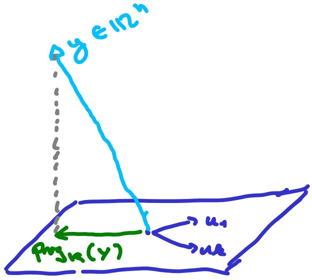
$u_1 \perp u_2.$

$$\mathrm{proj}_H(y) = \frac{y \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} u_1 + \frac{y \cdot u_2}{u_2 \cdot u_2} u_2$$

$$= \frac{3}{10} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\cancel{3}\,1}{\cancel{6}\,2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Frage:

Welcher Punkt aus K ist der zu y nächste Punkt?



Antwort:

$\mathrm{proj}_K(y)$.

$K = \mathrm{span}\{u_1, \dots, u_k\}$

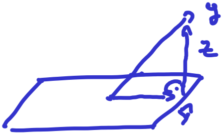
$u_1, \dots, u_k$ orthogonal und l. u.

Satz 86

Sei $W \subseteq \mathbb{R}^n$ *ein Unterraum von* $\mathbb{R}^n$ *und* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. *Die orthogonale Projektion* $\hat{\mathbf{y}}$ *von* $\mathbf{y}$ *auf* W *ist der Vektor aus* W, *der kleinsten Abstand zu* $\mathbf{y}$ *hat.*

Mit anderen Worten: Für alle $\mathbf{v} \in W$ *mit* $\mathbf{v} \neq \hat{\mathbf{y}}$ *gilt*

$$\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\| < \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|$$



Sei $v \in W$, $v \neq \hat{y}$

Beweis: $y = \hat{y} + z$ wobei $z \in W^\perp$

$\underline{y - \hat{y}} = z \qquad \underline{y - v} = z + \underbrace{\hat{y} - v}_{\neq 0}$

$\underline{\|y - \hat{y}\|^2} = \|z\|^2 \qquad \underline{\|y - v\|^2} = \|z + \hat{y} - v\|^2 \overset{\text{Pyt.}}{=} \|z\|^2 + \underbrace{\|y - v\|^2}_{>0}$

Beispiel

- Sei $H \subseteq \mathbb{R}^3$ der 2-dimensionale Unterraum (Ebene) der von

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird

- Sei $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- Berechne den zu $\mathbf{y}$ nächsten Punkt in H

Siehe vorige Slide $\text{proj}_H(y)$ mit $H = \text{Span}\{u_1, u_2\}$.

Orthormale Basen

Satz 87

Sein $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ *eine orthonormale Basis des Unterraums* $H \subseteq \mathbb{R}^n$.
Für $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *gilt*

$$\mathbf{proj}_H(\mathbf{y}) = \underbrace{(\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1)}_{\|u_1 \cdot u_1\| = 1}\mathbf{u}_1 + \cdots + \underbrace{(\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_p)}_{\|u_p u_p\| = 1}\mathbf{u}_p.$$

Ist U *die Matrix*

$$U = (\mathbf{u}_1 \mathbf{u}_2 \cdots \mathbf{u}_p),$$

dann gilt

$$\mathbf{proj}_H(\mathbf{y}) = UU^T \cdot y$$

Satz 88

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit linear unabhängigen Spalten. Dann kann A in der Form

$$A = Q \cdot R$$

$*\|q_1\|$

$A = \left(\frac{q_1}{\|q_1\|}, \dots, q_n\right)\begin{pmatrix} 1 & \ddots & \mu \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

faktorisiert werden, wobei $Q \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit orthonormalen Spalten und $R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix mit echt positiven Diagonaleinträgen ist.

Bemerkung: Die Spalten von Q sind eine orthonormale Basis von $\mathrm{Col}(A)$

Beweis: Wenn $A = Q \cdot R$ Faktorisierung mit Q orthogonal und $R = \begin{pmatrix} 1 & \ddots & \mu \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$, dann ist

$$\underbrace{Q \begin{pmatrix} \frac{1}{\|q_1\|} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\|q_n\|} \end{pmatrix}}_{Q'} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \|q_1\| & & \\ & \ddots & \\ & & \|q_n\| \end{pmatrix} \cdot R}_{R'}$$

$A = Q' \cdot R'$ wie gewünscht.

Berechne die QR-Zerlegung von

mit orthonormaler Basis.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3/4 & \\ 1 & 1/4 & \\ 1 & 1/4 & \\ 1 & 1/4 & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{4} & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{}{\sqrt{4}} \qquad \frac{}{\frac{\sqrt{12}}{4}}$$

$$R \quad \times \frac{4}{\sqrt{12}}$$

G-S:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} \quad \times \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

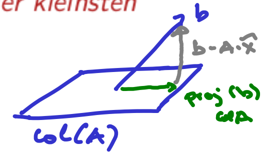
$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/6 \\ 5/6 \\ 5/6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Kleinste Quadrate

Definition

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Eine Lösung des *Problems der kleinsten Quadrate* ist ein $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\|b - A\hat{x}\| \leqslant \|b - Ax\| \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$



<u>Motivation:</u> $A x = b$ hat aufgrund von Mess-fehlern keine Lsg. <u>Ziel:</u> Finde $x^* \in \mathbb{R}^n$ <u>nah dran!</u>

d.h. $\| b - A \cdot x^* \|$ so klein wie möglich.

Löse System $A \cdot x = \text{proj}_{\text{col}(A)}(b)$ mit $\hat{x}$ Lösung gilt $\|b - A \cdot \hat{x}\|$ minimal.

Lösung des Problems der kleinsten Quadrate

- Berechne $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{proj}_{\mathrm{Col}(A)}(\mathbf{b})$
- Löse $Ax = \hat{\mathbf{b}}$

Frage: Wie berechnen wir $\hat{b}$?

Seien $\underbrace{a_1, \ldots, a_n}_{\tilde{A}}$ Basis von Col(A)

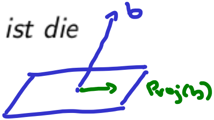
$\tilde{A} = Q \cdot R$ mit Q orthonormal.

$$\hat{b} = Q \cdot Q^T \cdot b$$

Löse $A \cdot x = \underbrace{Q \cdot Q^T \cdot b}_{\hat{b}}$.

Satz 89

Die Menge der Lösungen des Problems der kleinsten Quadrate ist die Menge der Lösungen des Gleichungssystems



$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$A^T A x = A^T b \qquad (\mathrm{I})$$

$$A\cdot x = \mathrm{proj}_{\mathrm{col}(A)}(b) \qquad (\mathrm{II})$$

Beweis: Seien $q_1,\dots,q_k$ orthonormal und $\mathrm{span}\{q_1,\dots,q_k\} = \mathrm{col}(A)$.

$$\mathrm{Proj}_{\mathrm{col}(A)}(b) = (b\cdot q_1)\cdot q_1 + \dots + (b\cdot q_k)\cdot q_k$$

Die Lösungen des kleinsten Quadrat Problems sind die Lösungen von

$$\boxed{A\cdot x = \mathrm{proj}_{\mathrm{col}(A)}(b) = Q\cdot Q^T\cdot b} \quad \text{mit } Q = (q_1,\dots,q_k)$$

Es gilt: $A = Q\cdot F$, da die Spalten von A LK. der Spalten von Q. mit $F \in \mathbb{R}^{k\times n}$

$A^T\cdot A\cdot x = A^T\cdot b$ umschreiben in $F^T\cdot \underline{Q^T\cdot Q}\cdot F\cdot x = F^T\cdot Q^T\cdot b$

Beispiel

- Finde eine Lösung des P.d.k.Q. für $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix}$$