Heute (18.11.2014):

- Textbuch Kapitel 5.4, 5.5
- Diagonalisierbarkeit
- Eigenvektoren und Lineare Transformationen
- Komplexe Eigenwerte

Diagonalisierbarkeit

Definition

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist *diagonalisierbar*, wenn es eine Diagonalmatrix D und eine invertierbare Matrix P gibt mit

$$A = PDP^{-1}.$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Wann ist eine Matrix diagonalisierbar?

Satz 66

Eine $n \times n$ Matrix A ist diagonalisierbar genau dann, wenn A n linear unabhängige Eigenvektoren hat.

Beweis:

„$\Rightarrow$" Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonalisierbar, d.h. $\exists\, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar

mit $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$ $\quad P = (p_1, \dots, p_n)$ $\quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$A \cdot p_i = \underbrace{P \cdot \underbrace{D \cdot \underbrace{P^{-1} \cdot p_i}_{e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Stelle.}}}_{= \lambda_i \cdot e_i}}_{= \lambda_i \cdot p_i}$$

$p_1, \dots, p_n$ sind n lin. unabhängige Eigenvektoren.

"$\Leftarrow$" Seien $p_1 \dots p_n$ lin. unabh. EV zu den EW $\lambda_1 \dots \lambda_n$.

Konstruiere: $P = (p_1 \dots p_n)$ $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Hoffnung: $A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

Nachweis: $A \cdot P = (A \cdot p_1 \dots A \cdot p_n) = (\lambda_1 p_1 \dots \lambda_n p_n)$

$$= (p_1 \dots p_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

Diagonalisierung

Satz 67

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *diagonalisierbar mit*

$$A = PDP^{-1}.$$

Dann sind die Spalten von P n *linear unabhängige Eigenvektoren von* A *und die Diagonalelemente von* D *die dazugehörigen Eigenwerte.*

Siehe vorherigen Beweis.

Diagonalisierung in 4 Schritten

1.) $p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ -3 & -5-\lambda & -3 \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

Diagonalisiere die folgende Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Probe:

$A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= P \cdot D$ (✓)

$= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 3 \\ 0 & -2-\lambda & -2-\lambda \\ 3 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix}$

$= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & -2-\lambda & 0 \\ 3 & 3 & -2-\lambda \end{pmatrix}$

$= -(2+\lambda) \cdot \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 0 & -2-\lambda \end{pmatrix}$

$= (2+\lambda)^2 (1-\lambda)$

1. Finde Eigenwerte: $\lambda_{1,2} = -2,\ \lambda_3 = 1$
2. Finde Basen der Eigenräume
3. Konstruiere P aus den Basen in Schritt 2
4. Konstruiere D aus den dazugehörigen Eigenwerten.

Schritt 2: $\lambda_{1,2} = 2$

Basis von $\ker\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

$= \ker\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} -x_2-x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$

$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & \\ 1 & 0 & ? \\ 0 & 1 & \end{pmatrix}$

$$\operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -3 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Frei}$$

$$\operatorname{Kern} = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot x_3 : x_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \underbrace{0 \quad\; 1}_{\text{EW } -2} & & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

Probe:

Satz 68 A

Eine $n \times n$-Matrix mit n verschiedenen Eigenwerten ist diagonalisierbar.

Beweis: $v_1, \dots, v_n$ Eigenvektoren zu verschieden Eigenwerten
$\lambda_1, \dots, \lambda_n \Rightarrow \{v_1 \dots v_n\}$ lin. unabh.

$\Rightarrow$ mit $P = (v_1 \dots v_n)$ ist A diagonalisierbar.

Übung

- Kann eine $n \times n$ Matrix mehr als n Eigenwerte haben? <u>Nein!</u>

$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ $\quad a_2 \neq 0$ $\quad p(x) = 0$, $p(1) = 0$, $p(3)$

hat höchstens 2 Nullstellen.

genauer: $p(x) \in P_n(x) \setminus \{0\} \Rightarrow p(x)$ hat $\leq n$ Nullstellen.

char. Pol. $\Rightarrow$

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}$$

Grad $\leq n$ $\Rightarrow$ $\blacksquare$

Übung: A $n \times n$ Matrix: n Komponenten $\in P_1(\lambda)$

andere " $\in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \det(A) \in P_n(\lambda)$

Weniger als n Eigenwerte

Satz 69

Sei A eine $n \times n$-Matrix mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

a) *Für $1 \leqslant k \leqslant p$ ist die Dimension des Eigenraumes von λ_k höchstens die Vielfachheit des Eigenwertes λ_k.*

b) *Die Matrix A ist diagonalisierbar dann und nur dann, wenn die Summe der Dimensionen der Eigenräume der λ_k gleich n ist und dies passiert genau dann wenn*
   i) *Das charakteristische Polynome zerfällt in Linearfaktoren und*
   ii) *Die Dimension des Eigenraums von λ_k ist genau die Vielfachheit von λ_k.*

c) *Ist A diagonalisierbar und $\mathcal{B}_k$ eine Basis des Eigenraums von λ_k, dann ist $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$, die aus Eigenvektoren von A besteht.*

Beispiel

- Ist die folgende Matrix diagonalisierbar?

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Ja!

charakteristisches Polynom:

$\det(A - I \cdot \lambda) = (5-\lambda)^2(-3-\lambda)^2$

$\Rightarrow$ EW sind 5 und (-3)

Eigenraum zum EW (-3): Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\{ v \mid A \cdot v = (-3) v \}$

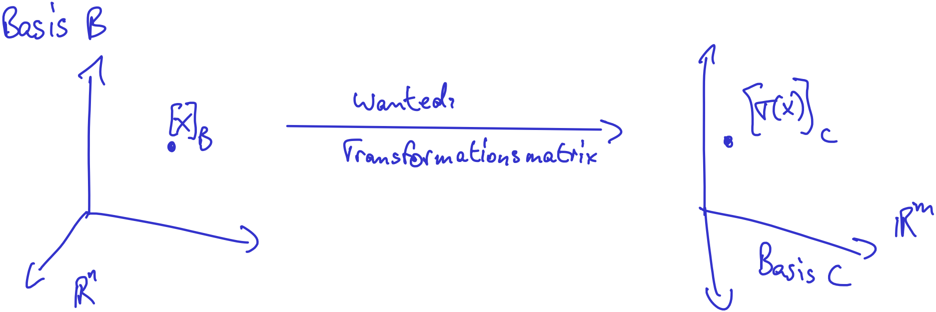
$\Leftrightarrow (A - (-3) I) v = 0$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} v = 0$

Eigenraum zum EW 5:

$v: (A - 5 \cdot I) v = 0 \Leftrightarrow \left\{ v \in \mathbb{R}^4 : \begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -8 \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \Rightarrow \dim ER(5) = 2$

Basiswechsel



Basiswechsel Beispiel

$T : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$, $T(p) = p'$ (Ableitung)

Basis $\underbrace{\{b_1, b_2, b_3\}}_{\mathcal{B} =}$ mit $b_1(t) = 1, b_2(t) = t, b_3(t) = t^2$

$p(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2$

$= a_0 \cdot b_1(t) + a_1 \cdot b_2(t) + a_2 \cdot b_3(t)$

$T(p)(t) = a_1 + 2a_2 \cdot t$

$$[p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{matrix ?}]{\text{Transformations-}} [T(p)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[b_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[T(b_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[T(b_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[T(b_3)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$$A \cdot [p]_{\mathcal{B}} = [T(p)]_{\mathcal{B}}$$

Satz 70

Angenommen A ist diagonalisierbar mit $A = PDP^{-1}$ wobei D eine $n \times n$ Diagonalmatrix ist. Sei $\mathcal{B}$ die Basis des $\mathbb{R}^n$ gebildet aus den Spalten von P. Dann ist D die Transformationsmatrix der Abbildung $x \mapsto Ax$ nach Basiswechsel auf $\mathcal{B}$.

$$A \cdot x = \underbrace{P \cdot D \cdot \underbrace{P^{-1} \cdot x}_{[x]_B}}$$

Transformation von $[x]_B$ auf $[Ax]_B$

$$x = P \cdot [x]_B \iff P^{-1} \cdot x = [x]_B$$

$$Ax = P \cdot [Ax]_B$$

Was bedeutet das?

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit D (von links)

$\hat{=}$ Skalieren der Komponenten

Ähnlichkeit von Matrix Repräsentationen

$A = PCP^{-1}$

A und C ähnlich $\iff \exists P$ invertierbar $A = P \cdot C \cdot P^{-1}$

$$
\begin{tikzcd}
x \arrow[rr, "\cdot A"] \arrow[d, "\cdot P^{-1}"'] & & Ax \\
{[x]_B} \arrow[rr, "\cdot C"'] & & {[Ax]_B} \arrow[u, "\cdot P"']
\end{tikzcd}
$$

B Basis aus Spalten von P