Heute (13.11.2014):

- Textbuch Kapitel 5.1, 5.2
- Eigenwerte und Eigenvektoren
- Das charakteristische Polynom
- Diagonalisierbarkeit

Eigenvektoren und Eigenwerte

Definition 4

Ein *Eigenvektor* einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist ein Vektor $\underline{x \neq 0}$ aus $\mathbb{R}^n$ mit

$$A \cdot x = \lambda \cdot x$$

mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

λ ist der Eigenwert zum Eigenvektor x.

$$A \cdot x = \lambda x \iff Ax - \lambda x = 0$$
$$\iff (A - \lambda \cdot I) \cdot x = 0$$

Feststellung: λ EW von $A \iff \det(A - \lambda \cdot I) = 0$

Satz 60

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wenn $v_1, \ldots, v_p$ Eigenvektoren zu den paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sind, dann ist $\{v_1, \ldots, v_p\}$ linear unabhängig.

Beweis: Induktion über p.

$p=1$: Menge $\{v_1\}$ ist linear unabhängig $(v_1 \neq 0)$ ✓

$p=2$: (Demonstration) zu zeigen ist (*) $\beta_1 \cdot v_1 + \beta_2 v_2 = 0 \Rightarrow \beta_1 = \beta_2 = 0$

$$0 = A \cdot 0 = A(\beta_1 v_1 + \beta_2 v_2) = \beta_1 A \cdot v_1 + \beta_2 A \cdot v_2 = \beta_1 \cdot \lambda_1 v_1 + \beta_2 \lambda_2 v_2$$

$- (*) \cdot \lambda_2$

$$0 = \beta_1(\lambda_1 - \lambda_2) v_1 + \beta_2 (\lambda_2 - \lambda_2) v_2$$

$$= \beta_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \underbrace{v_1}_{\neq 0} \Rightarrow \beta_1 = 0$$

$$\Rightarrow \beta_2 \cdot v_2 = 0 \Rightarrow \beta_2 = 0.$$

$p \to (p+1)$: seien $v_1, \dots, v_{(p+1)}$ EV zu den paarweise verschiedenen EW $\lambda_1, \dots, \lambda_{(p+1)}$

zu zeigen $\overset{(*)}{} \; \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{p+1} v_{p+1} = 0 \implies \beta_1 = \dots = \beta_{(p+1)} = 0$

wegen Induktionsvoraussetzung $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_p v_p = 0 \implies \alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$

$$0 = A \cdot 0 = A(\beta_1 v_1 + \dots + \beta_{p+1} v_{p+1}) = \beta_1 \lambda_1 v_1 + \dots + \beta_{p+1} \lambda_{p+1} v_{p+1}$$

$- (*) \cdot \lambda_{p+1}$

$$0 = \beta_1 \lambda_1 v_1 - \beta_1 \lambda_{p+1} v_1 + \dots + \beta_{p+1} \lambda_{p+1} v_{p+1} - \beta_{p+1} \lambda_{p+1} v_{p+1}$$

$$= \beta_1 (\underbrace{\lambda_1 - \lambda_{p+1}}_{\neq 0}) v_1 + \dots + \beta_p (\underbrace{\lambda_p - \lambda_{p+1}}_{\neq 0}) v_p + 0$$

$$\overset{\text{I.V.}}{\implies} \beta_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1}) = 0 = \dots = \beta_p(\lambda_p - \lambda_{p+1})$$

$$\implies \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0$$

(Einsetzen in $(*)$) $\implies \beta_{p+1} \underbrace{v_{p+1}}_{\neq 0} = 0 \implies \beta_{p+1} = 0$

$\boxtimes$

Das charakteristische Polynom

- Beispiel: Finde alle Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$$

2 EW: 3 und -7

λ ist EW von $A \iff \det(A - \lambda \cdot I) = 0$

Bsp: $\Rightarrow$ $A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{pmatrix}$

$$\det(A - \lambda \cdot I) = (2-\lambda)(-6-\lambda) - 9$$
$$= -12 + 6\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 9$$
$$= \underbrace{\lambda^2 + 4\lambda - 21}_{\text{charakteristische Polynom von } A}$$

$$\det(A - \lambda \cdot I) = 0 \iff \lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0$$
$$\iff (\lambda - 3)(\lambda + 7) = 0$$
$$\iff \lambda = 3 \text{ oder } \lambda = -7$$

Satz 19 (Ergänzung)

Eine $\mathbb{R}^{\underline{n \times n}}$-matrix A ist genau dann invertierbar, wenn

s) die Zahl 0 kein Eigenwert von A ist.

t) $\det(A) \neq 0$.

Für $\lambda = 0$: $\det(A - \lambda \cdot I) \neq 0 \iff \det(A - 0 \cdot I) = \det(A) \neq 0$

Das charakteristische Polynom

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und sei λ eine Variable. Das charakteristische Polynom von A ist

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I).$$

Beispiel

- $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- Bestimme das charakteristische Polynom von A.

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I) = \det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 8-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)\cdot(3-\lambda)\cdot(8-\lambda)\cdot(3-\lambda)$$

Vielfachheit von EW λ_1 $\quad \max\{ i \in \mathbb{N}_{\geq 1} : (\lambda-\lambda_1)^i \text{ teilt } p(\lambda) \}$

Beispiel

- $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- Bestimme das charakteristische Polynom von A.

Beispiel

- $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- Bestimme das charakteristische Polynom von A.
- Der Eigenwert 3 hat *Vielfachheit* 2.
- Die *algebraische Vielfachheit* eines Eigenwertes ist seine Vielfachheit als Wurzel des charakteristischen Polynoms.

Beispiel

- Das charakteristische Polynom einer gegebenen 6×6-Matrix sei $\lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4$.
- Bestimme die Eigenwerte der Matrix mit Ihrer Vielfachheit.

$$p(\lambda) = \lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4 = \lambda^4(\lambda^2 - 4\lambda - 12)$$
$$= \lambda^4(\lambda - 6)(\lambda + 2)$$

$\lambda_1 = 0$ hat Vielfachheit 4

$\lambda_1 = -2$ hat —"— 1

$\lambda_1 = 6$ hat —"— 1

Bsp 0 EW

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel

n beliebig

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Das Charakteristische Polynom von A

1. hat Grad 1
2. hat Grad $\leqslant n$ ✓
3. hat Grad $= n$ ✓
4. kann Grad $< n$ haben.

Direkte Demokratie, ein Beispiel: ☺

	geht	geht nicht
1		
2	viele	2
3	viele	7
4	5	wenig viele

$\det(A-\lambda I)$

Entwicklung nach 1. Spalte

$$= (a_{11}-\lambda)\cdot\det\overbrace{\begin{bmatrix} a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}}^{\text{char. poly. von } A' \Rightarrow \text{ I.V.}}$$

$\Rightarrow$ Grad $n-1$ $\Rightarrow$ Grad n

$$-a_{21}\cdot\det\underbrace{\begin{bmatrix} a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33}-\lambda & a_{3n} \\ \vdots & & \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}}_{\text{Polynom mit Grad} \leq n-1}$$

$+ \ldots$

$$A-\lambda I = \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix}$$

$\leftarrow A'$

$(n-1)\times(n-1)$

Ähnlichkeit

Definition

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißen *ähnlich*, wenn es eine invertierbare Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt mit $A = PBP^{-1}$.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{2}$$

$$P \cdot B \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} =: A$$

$\Rightarrow$ A und B sind ähnlich.

Eigenwerte ähnlicher Matrizen

Satz 61

Ähnliche Matrizen A und B haben dasselbe charakteristische Polynom und also auch dieselben Eigenwerte mit der jeweils selben Vielfachheit.

Beweis: Annahme: $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$

zu zeigen: $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$

$$\det(A - \lambda I) = \det(P \cdot B \cdot P^{-1} - \lambda I) = \det(P \cdot B \cdot P^{-1} - \lambda P \cdot I \cdot P^{-1})$$

$$= \det(P \cdot (B - \lambda I) \cdot P^{-1}) = \underbrace{\det(P) \cdot \det(P^{-1})}_{=1} \cdot \det(B - \lambda I)$$

$$= \det(B - \lambda I)$$

$\blacksquare$

Warnungen

char poly: $(2-\lambda)^2$

- Die Matrizen
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
sind nicht ähnlich (warum?) obwohl sie dieselben Eigenwerte (mit entsprechenden Vielfachheiten) haben.
- Ähnlichkeit und Zeilenäquivalenz sind nicht das gleiche!

<u>P invertierbar</u>

$$P \cdot B \cdot P^{-1} = A$$

Diagonalmatrizen

- $D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix}$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Beschreibe D^j für $j \geqslant 1$

$$D^j = \underbrace{D \cdot D \cdot D \cdot \ldots \cdot D}_{j \text{ mal}}$$

$$D^j = \begin{pmatrix} 2^j & 0 \\ 0 & 1^j \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{j\text{-mal}}$$

$$D^j = \begin{pmatrix} d_1^j & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n^j \end{pmatrix}$$

Beispiel

- Betrachte
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$
- Berechne A^i für $i \geqslant 1$

Eigenwerte $\quad \det\begin{pmatrix} 7-\lambda & 2 \\ -4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \ldots = (\lambda-3)(\lambda-5) \Rightarrow$ EW: 3, 5

Eigenvektoren zum EW 3:

Lsg. $x \neq 0$ $\quad \begin{pmatrix} 7-3 & 2 \\ -4 & 1-3 \end{pmatrix} x = 0 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{= v_1}$ ist EV zum EW 3

Eigenvektoren zum EW 5:

Lsg $x \neq 0$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix} x = 0 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{= v_2}$ ist EV zum EW 5.

Beispiel

- Betrachte
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$
- Berechne A^i für $i \geqslant 1$

$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow$ EW 3

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow$ EW 5

$V = [v_1 \; v_2]$

$A \cdot V = [3v_1 \; 5v_2] = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot V = V \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

V invertierbar (v_1 und v_2 sind EV zu unterschiedl. EW $\Rightarrow$ lin unabh.)

$\Rightarrow V^{-1}$

$V^{-1} \cdot A \cdot V = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ bzw. $A = V \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} V^{-1}$

$$A^j = \underbrace{V \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} V^{-1} \cdot V \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} V^{-1} \cdot \ldots \cdot V \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} V^{-1}}_{j\text{-mal}} = V \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}^j V^{-1}$$