## Heute (11.11.2014):

- Textbuch Kapitel 4.6, 5.1
- Spaltenraum, Zeilenraum und Rang
- Eigenwerte und Eigenvektoren

# Spaltenrang und Zeilenrang

$\mathrm{Col}(A) \subseteq \mathbb{R}^m$ ist Unterraum

$\mathrm{Col}(A) = \{ A \cdot x : x \in \mathbb{R}^n \}$

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine beliebige Matrix.
- Wir lernen jetzt:

*Maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen*

ist gleich

*maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten*

$\mathrm{Row}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Unterraum

$\mathrm{Row}(A) = \{ A^T \cdot x : x \in \mathbb{R}^m \}$

# $\mathrm{Col}(A)$ und $\mathrm{Row}(A)$

- $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$
- Erinnerung: $\mathrm{col}(A) = \{Ax \colon x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ ist das Erzeugnis der Spalten von $A$.
- Verstehen wir nun die *Zeilen* von $A$ als Vektoren aus $\mathbb{R}^n$, dann können wir definieren:

$$\mathrm{row}(A) \text{ ist das Erzeugnis der Zeilen von } A.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{row}(A) = \left\{ \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

# $\mathrm{Col}(A)$ und $\mathrm{Row}(A)$

- $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$
- Erinnerung: $\mathrm{col}(A) = \{Ax\colon x \in \mathbb{R}^n\} \subseteq \mathbb{R}^m$ ist das Erzeugnis der Spalten von $A$.
- Verstehen wir nun die *Zeilen* von $A$ als Vektoren aus $\mathbb{R}^n$, dann können wir definieren:

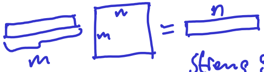
$$\mathrm{row}(A) \text{ ist das Erzeugnis der Zeilen von } A.$$

Zwei Aussagen sind korrekt. Welche? (Wir verstehen eine $n \times 1$ Matrix auch als Vektor im $\mathbb{R}^n$)

1. $\mathrm{Row}(A) = \mathrm{Col}(A^T)$ ✓
2. $\mathrm{Row}(A) = \{Ax\colon x \in \mathbb{R}^n\}$ f
3. $\mathrm{Row}(A) = \{x^T \cdot A\colon x \in \mathbb{R}^m\}$ f
4. $\mathrm{Row}(A) = \{(x^T A)^T\colon x \in \mathbb{R}^n\}$ f
5. $\mathrm{Row}(A) = \{(x^T A)^T\colon x \in \mathbb{R}^m\}$ ✓

| Y | N |
|---|---|
| viele | 0 |
| 0 | viele |
| $\approx 6$ | mehr |
| mehr | $\approx 6$ |
| viele | $\approx 2$ |

$\{Ax : x \in \mathbb{R}^n\} = \mathrm{col}(A)$

$x^T \cdot A =$ 

streng genommen nicht Vektoren $(n\times 1)$

multiplikation nicht def. wg. nicht-passenden Dimensionen

# Elementare Zeilenoperationen

## Definition

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sind ~~z~~ *Zeilenäquivalent*, wenn die Matrix $B$ durch eine endliche Folge von elementaren Zeilenoperationen

1. Addition eines Vielfachen einer Zeile auf *eine andere* Zeile
2. Vertauschung zweier Zeilen
3. Skalieren einer Zeile mit einem Skalar $\neq 0$

hervorgeht.

$A = E_1 \cdot \ldots \cdot E_k B$ $\qquad$ $B = (E_1 \cdot \ldots \cdot E_k)^{-1} A = E_k^{-1} \cdot \ldots \cdot E_1^{-1} \cdot A$

Tranformationsmatrizen der elementaren Zeilenoperationen

### Satz 2

*Seien $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ zeilenäquivalent, dann gilt*

$$\mathrm{Row}(A) = \mathrm{Row}(B).$$

Beweis: "$\subseteq$" $\quad [x \in \mathrm{Row}(A) \Rightarrow x \in \mathrm{Row}(B)]$

$x \in \mathrm{Row}(A) \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}^m$ mit $\quad x = (y^T \cdot A)^T = A^T \cdot y$

möchte zeigen: $x$ ist auch Linearkomb. der Zeilen von $B$.

wissen (Zeilenäquivalenz): $\underline{A = E \cdot B} \Rightarrow x = (E \cdot B)^T \cdot y$

$$= B^T \underbrace{(E^T \cdot y)}_{\in \mathbb{R}^m}$$

$\Rightarrow x \in \mathrm{Row}(B)$

"$\supseteq$", wegen $B = E^{-1} A$, analog

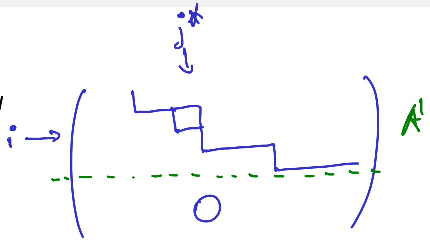
$\blacksquare$

# $A$ in Zeilenstufenform

**Satz**

*Sei $A$ in Zeilenstufenform, dann sind*

die Nichtnullzeilen




*eine Basis von* $\mathrm{Row}(A)$.

Beweis: müssen zeigen, dass die Zeilen in $A'$ linear unabh. sind.

Sei $x^T \cdot A' = 0^T \implies x = 0$

Annahme $x \neq 0$. Sei $i$ der kleinste Index, sodass $x_i \neq 0$.

Sei $j^* = \min\{j : A'_{ij} \neq 0\}$ $\quad (x^T \cdot A)_{j^*} \neq 0$ ↯ $\blacksquare$

# Beispiel

Basis von Col(A)?

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

Bestimme eine Basis von $\mathrm{Col}(A)$ und $\mathrm{Row}(A)$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 8 & 0 & -17 \\ 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 3 & 11 & -19 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & -13 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

Zeilenstufenform:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Basis von $\mathrm{Row}(A) = \mathrm{Row}(B)$?

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -4 \\ 20 \end{pmatrix} \right\}$$

- *Spaltenrang*: Dimension von $\mathrm{Col}(A)$
- *Zeilenrang*: Dimension von $\mathrm{Row}(A)$

Mit anderen Worten

max. Anzahl lin. unabh. Spalten

= max. Anzahl lin. unabh. Zeilen

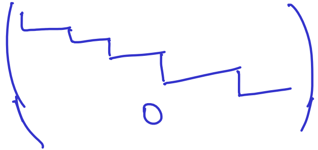
### Satz 4

*Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Es gilt*

$$\dim(\mathrm{Col}(A)) = \dim(\mathrm{Row}(A)).$$

Beweis:

$A \rightsquigarrow$




$\dim(\mathrm{Row}(A)) = \#$ Nichtnullzeilen $=$ $\#$ Pivotspalten $= \dim(\mathrm{Col}(A))$

$\boxtimes$

### Definition 1

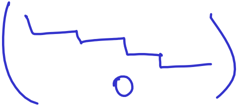
Der *Rang* einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die Dimension des Zeilen/Spalten-Raumes.

### Satz 5

*Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dann gilt*

$$\mathrm{Rang}(A) + \dim(\ker(A)) = n.$$

Beweis:

$A \rightsquigarrow$ 

Rang(A) = # Pivotspalten

dim(ker(A)) = # freier Variablen

$\Sigma = n$ (Summe)

$\blacksquare$

# Eigenwerte und Eigenvektoren

# Lineare Abbildungen

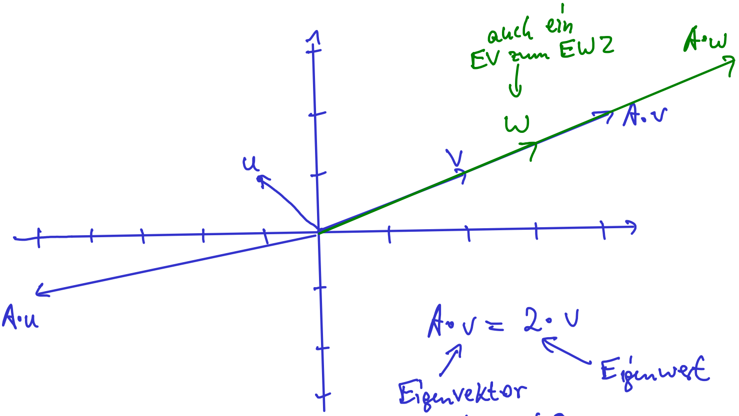
- $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto A \cdot x$

$x \in \mathbb{R}^2$

$A \cdot u = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A \cdot v = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$




$A \cdot v = 2 \cdot v$

Eigenvektor zum Eigenwert 2

Eigenwert

# Eigenvektoren und Eigenwerte

## Definition

Ein *Eigenvektor* einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist ein Vektor $x \neq 0$ aus $\mathbb{R}^n$ mit

$$A \cdot x = \lambda \cdot x$$

mit einem Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

Wir nennen
$\lambda$ einen Eigenwert und $v$ ein Eigenvektor zum EW $\lambda$.

# Beispiel

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$
- Sind $u$ und $v$ Eigenvektoren von $A$?

$$A \cdot u = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ 20 \end{pmatrix} = (-4) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

(-4) ist Eigenwert von $A$

u EV ?

- [x] Ja
- [ ] Nein

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}: \quad \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

v EV ?

- [ ] Ja
- [x] Nein

# Beispiel

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$
- Ist $7$ ein Eigenwert der Matrix $A$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} - 7\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

z.B. Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Frage: Gibt es ein $x \in \mathbb{R}^2$, sodass

$$A \cdot x = 7 \cdot x \; ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff A \cdot x = 7 \cdot I \cdot x$$

$$\iff (A \cdot x - (7 \cdot I) \cdot x) = 0$$

$$\iff (A - 7 \cdot I) \cdot x = 0$$

Also mit anderen Worten

gibt es ein $x \in \operatorname{Ker}(A - 7 \cdot I) \setminus \{0\}$

$$\iff \operatorname{Ker}(A - 7 \cdot I) \neq \{0\}$$

# Eigenraum

- $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert von $A$
- Menge der Eigenvektoren mit EW $\lambda$ ist Teilmenge von

$$\{x \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda I)x = 0\} = \ker(A - \lambda \cdot I)$$

## Definition

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $A$. Der Unterraum von $\mathbb{R}^n$ $\ker(A - \lambda I)$ heißt *Eigenraum* von $A$ bzgl. $\lambda$.

$\ker(A - \lambda \cdot I) \setminus \{0\}$ = Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda$.

# Beispiel

Basis des $\ker(A-2\cdot I)$?

- $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$
- $\lambda = 2$ ist EW
- Bestimme Basis des Eigenraumes bzgl. $2$.

Bestimme die Lösungen $(A-2\cdot I)x = 0$

$$A-2\cdot I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 0$$

$x_2, x_3$ freie Variablen

Basis von $\ker(A-2\cdot I)$ ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

# Dreiecksmatrizen

Bspi $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix} = A$

Eigenwerte von $A$?

$$A - \lambda \cdot I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 5-\lambda & 0 \\ 1 & 8 & 7-\lambda \end{pmatrix}$$

Wenn $\ker(A - \lambda I)$ nicht trivial $\Rightarrow \det(A - \lambda \cdot I) = 0$

$$\det(A - \lambda I) = (2-\lambda) \cdot (5-\lambda) \cdot (7-\lambda) = 0$$

$\Rightarrow$ Lösungen $\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 5 \\ \lambda_3 = 7 \end{array}\right\}$ Eigenwerte von $A$

# Dreiecksmatrizen

**Satz 6**

*Die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix sind die Diagonalelemente der Matrix.*

eben gezeigt