Heute (06.11.2013):

- Textbuch Kapitel 4.4, 4.5, 4.6
- Dimension
- Koordinaten
- Basiswechsel

Unterräume

V nicht leere Menge

Definition

Sei $(V, +, \cdot)$ ein reeller Vektorraum. Ein *Unterraum* von V ist eine Menge $H \subseteq V$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

i) Der Nullvektor $\mathbf{0}$ ist ein Element von H.

ii) Für alle $u, v \in H$ gilt $u + v \in H$

iii) Für alle $u \in H$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\alpha \cdot u \in H$.

$\alpha \cdot p(x)$

$= \underbrace{\alpha \cdot a + \alpha \cdot b x} \in P_1$

$p(x) = a + b x$

$q(x) = c + d \cdot x$

$(q+a)(x) = \underbrace{(a+c) + (b+d) \cdot x}_{\text{grad} \leq 1 \in P_1}$

P_1 Unterraum von P_2.

P_2 = Menge der Polynome vom Grad ≤ 2.

P_1 = " ≤ 1

Der Span und lineare Unabängigkeit $(V,+,\cdot)$

Sei V ein Vektorraum und $v_1, ..., v_p \in V$. Analog zu $\mathbb{R}^n$ definieren wir

- $\text{Span}\{v_1, ..., v_p\} = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p \colon \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}\}$ *(Erzeugnis von $v_1, \ldots, v_p$.)*
- $v_1, \ldots, v_p$ sind *linear unabhängig*, wenn aus $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p = 0$ folgt, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Basis eines Unterraums $(V, +, \cdot)$

Definition

Sei $H \subseteq V$ ein Unterraum von V. Eine *Basis* von H ist eine Menge linear unabhängiger Vektoren $\{v_1, \dots, v_p\} \subseteq H$ mit

$$\mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_p\} = H$$

$V = P_3$

$H = P_1$

$\{2, 1+x\}$ ist Basis von H.

1) lin. unabh.: $\alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot (1+x) = 0$ ✓

$\underbrace{\alpha_1 \cdot 2 + \alpha_2 \cdot 1}_{=0} + \underbrace{\alpha_2}_{=0} \cdot x = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0.$

2.) $\mathrm{span}\{2, 1+x\} = P_1$ ✓

$a + b \cdot x = \alpha_1 \cdot (2) + \alpha_2 (1+x)$

$\alpha_2 = b, \alpha_1 = (a-b)/2$

Sei $V = \text{Span}\{u_1, \ldots, u_n\}$. Hat jeder Unterraum $H \subseteq V$ eine Basis?

vorher: $\mathbb{R}^n$

$(u_1, \ldots, u_n) \underbrace{A}_{\in \mathbb{R}^{n \times p}} = (v_1, \ldots, v_p)$

Die Antwort auf diese Frage ist: “Ja”

$v_1 = \underbrace{a_{11}}_{\in \mathbb{R}} \cdot u_1 + a_{21} \cdot u_2 + \ldots + \underbrace{a_{n1}}_{\in \mathbb{R}} \cdot u_n$

$v_2 = a_{12} u_1 + \ldots + a_{n2} u_n$

$\vdots$

$v_p = a_{1p} u_1 + \ldots + a_{np} u_n.$

wenn $p > n$

$\Rightarrow \text{Kern}(A) \neq \{0\}$.

Sei $\lambda \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ im $\text{Kern}(A)$

Beweisidee:

- Wir wissen: Wenn $\{v_1, \ldots, v_p\} \subset V$ linear unabhängig, dann gilt $p \leqslant n$.

$0 = (v_1, \ldots, v_p) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = (u_1 \ldots u_n) \underbrace{A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix}}_{0}$

- Wir zeigen gleich: Wenn $B = \{v_1, \ldots, v_p\} \subset H$ linear unabhängig und keine Basis von H, dann existiert ein $v^* \in H$ mit $\{v_1, \ldots, v_p, v^*\}$ linear unabhängig.

d.h. $p > n$ $\Rightarrow v_1, \ldots, v_p$ linear abh.!

- Wir setzen dann $B = \{v_1, \ldots, v_p, v^*\}$ und wiederholen diesen Ersetzungsschritt solange, bis B eine Basis ist.
- Wenn man mit $B = \{v\}$ mit einem Beliebigen Vektor $0 \neq v \in H$ startet erhält man nach höchstens $n - 1$ vielen Schritten eine Basis.

Ein Ergänzungssatz

Satz 51

Seien $\{v_1, .., v_p\}$ *linear unabhängig und* $v^* \notin \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_p\}$, *dann ist* $\{v_1, \ldots, v_p, v^*\}$ *linear unabhängig.*

genauso wie $\mathbb{R}^n = V$.

Basissatz

Satz 52

Ein Unterraum $\{0\} \neq H \subseteq \overset{V}{\cancel{\mathbb{R}^n}}$ *hat eine Basis.*

(Bedingung

$V = \mathrm{span}\{u_1, \dots, u_n\}$

$\uparrow$

V ist endlich erzeugt.

Dimension

Satz 53

Sei $H \subseteq V$ ein Unterraum und $\{b_1, \dots, b_k\}$ und $\{c_1, \dots, c_l\}$ zwei Basen von H. Dann gilt $k = l$.

Jede Basis von H hat also immer gleich viele Elemente.

Dimension

V sei endlich erzeugt.

Definition

Die *Dimension* eines Unterraums $H \neq \{0\}$, $\dim(H)$ ist die Anzahl von Vektoren in einer Basis von H.
Die Dimension des Unterraums $\{0\}$ ist 0.

Eindeutige Darstellung durch Koordinaten

Satz 54

Sei $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ eine Basis des Vektorraums V. Für jedes $\mathbf{x} \in V$ gibt es einen eindeutigen Vektor

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

mit $\mathbf{x} = x_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \cdots + x_n \mathbf{b}_n$.

← Gewicht in der Linearkombination von $b_1, \ldots, b_n$, die x ergibt!

Eindeutigkeit folgt aus lin. Unabhängigkeit der $b_1, \ldots, b_n$. Gäbe es noch

$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ mit $y_1 b_1 + \cdots + y_n b_n = x = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$.

$\Rightarrow \quad 0 = (y_1 - x_1) b_1 + \cdots + (y_n - x_n) \cdot b_n$

Es gibt ein $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $y_i - x_i \neq 0$

somit $\lightning$ zur lin. Unabh. der $b_1, \dots, b_n$.

Existenz folgt aus $\operatorname{Span}\{b_1 \dots b_n\} = V$.

Bsp: P_2 $B = \{ 1, 2 \cdot X, X - X^2 \}$

$q(x) = 4 + 3x + 9x^2$ $\quad [q]_B = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$

$q(x) = 4 + 3x + 9x^2 = y_1 \cdot 1 + y_2 \cdot 2x + y_3 (x - x^2)$

$= y_1 \cdot 1 + (2y_2 + y_3) x - y_3 x^2$

GS:

$4 = y_1$ $\qquad y_1 = 4$

$3 = 2y_2 + y_3$ $\qquad y_3 = -9 \qquad y_2 = \frac{12}{2} = 6$

$9 = -y_3$

Beispiel

$\{1, x, x^2\}$

$\mathcal{B} = \{2, x+1, x^2+x\}$ ist eine Basis von $\mathbf{P}_2$. (Warum?)

Berechne die Koordinaten von $p(x) = 4 + 3x + x^2$.

<u>Übung:</u>

Lineare Abbildungen

Definition

Seien V und W Vektorräume und $T : V \to W$ eine Funktion. Die Funktion T ist eine *lineare Abbildung*, falls

1. $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, und
2. $T(\alpha \mathbf{v}) = \alpha T(\mathbf{v})$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{v} \in V$.

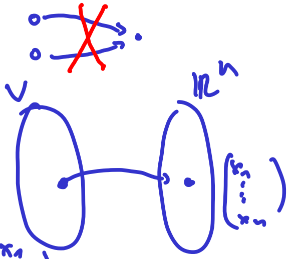
Satz 55

Sei V ein Vektorraum mit Basis $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$. Die Abbildung

$$[\cdot]_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$[v_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

welche einen Vektor auf seine Koordinaten bzgl. $\mathcal{B}$ abbildet ist eine bijektive lineare Abbildung.



<u>Injektiv:</u> $u \neq w \in V$, $u = \lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$

$w = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$.

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

<u>Surjektiv:</u> Sei $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ Urbild.

$$\left[(x_1 \cdot v_1 + \dots + x_n \cdot v_n)\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Bleibt zz.

1.) $[u+w]_B = [u]_B + [w]_B$

2.) $[\alpha \cdot u]_B = \alpha \cdot [u]_B$

Zu 1:

$u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \qquad [u]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

$w = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n \qquad [w]_B = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$

$u+w = (\alpha_1+\beta_1) v_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) \cdot v_n \quad \Rightarrow \quad [u+w]_B = [u]_B + [w]_B$

Zu 2: ähnlich einfach.

Beispiel

Betrachte die Basis $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ von $\mathbb{R}^2$.

$V \to \mathbb{R}^2$

Welche Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ beschreibt die lineare Abbildung $[\cdot]_{\mathcal{B}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$?

Die Spalten von A sind die Bilder der Einheitsvektoren.

$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -1 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\lambda_2 = 1/2$

$\lambda_1 = 0$

$\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\beta_2 = -1$

$\beta_1 = 1$

$\left[\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = A \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

Beispiel

$x^2 \notin \mathrm{Span}(x, 1+x^2)$ $(-3x\ x^2) \notin \mathrm{Span}.$

$1 \notin \mathrm{Span}(x, 1+x^2)$

- Ist $x, 1+x^2$ eine Basis von $\mathbb{P}_2$? dim $(\mathbb{P}_2) = 3$, 2 Vektoren $\Rightarrow$ kein Basis.
- Ist $1, x, x^2, 1+x^2$ eine Basis von $\mathbb{P}_2$?
  - Nein, da $1+x^2 = 1\cdot 1 + 1\cdot x^2$ also nicht lin. abh.
  - dim $(\mathbb{P}_2) = 3$, 4 Vektoren!

Basiswechsel

Beispiel:

- Seien $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ und $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2\}$ Basen des Vektorraums V.
- Wir kennen die Koordinaten:

$b_1 = 4\cdot c_1 + c_2 \qquad b_2 = -6\cdot c_1 + c_2$

$$[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Sei ferner $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$[x_B]_1 = 3\cdot 4 + 1\cdot(-6)$

- Berechne $[x]_{\mathcal{C}}$.

Wir suchen x_1, x_2 mit $x = x_1\cdot c_1 + x_2 \cdot c_2$

$$x = 3\cdot b_1 + 1\cdot b_2 = 3\cdot(4\cdot c_1 + 1\cdot c_2) + 1\cdot(-6\cdot c_1 + 1\cdot c_2)$$

$$[x]_{\mathcal{C}} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Basiswechselmatrix von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{C}$ $\quad P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$

Basiswechselsatz

Satz 56

Seien $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ *und* $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ *Basen des Vektorraums* V.
Es existiert eine eindeutige Matrix $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *mit*

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \boxed{\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

für alle $\mathbf{x} \in V$.
Die Spalten von $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ *sind die* $\mathcal{C}$*-Koordinaten von* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = ([\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}}[\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} \cdots [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}})\,.$$

Beispiel

- $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\cancel{\mathbf{b}_2}\ c_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ Basen von $\mathbb{R}^2$.
  - Berechne $\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P}$

Wir brauchen dazu die Koordinaten von $\mathcal{B}$ bzgl. $\mathcal{C}$.

$[b_1] = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & -9 & -5 \\ -4 & -5 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot 4 \\ + \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & -9 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot 3 \ - \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \end{array}\right)$$

$$\underset{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}{P} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

Was ist $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$?

- Seien $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ und $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ Basen des Vektorraums V.
- Die Spalten von $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ sind die Koordinaten der $\mathbf{b}_i$ bzgl $\mathcal{C}$.
- Also sind diese linear unabhängig.

Beispiel

- $\mathcal{B} = \{1, x\}$ und $\mathcal{C} = \{2, 1 + x\}$ sind Basen von $\mathbb{P}_1$.
- Berechne $\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}$ und $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}$.

Wir benötigen die Koordinaten $[b_1]_\mathcal{C}$ und $[b_2]_\mathcal{C}$

$$[1]_\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad [x]_\mathcal{C} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \qquad [2]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[1+x]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P}\right)^{-1} = \left(\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}\right)$$