Heute (4.11.2014):

- Cramersche Regel
- Die Adjungierte
- Reelle Vektorräume (Textbuch Kapitel 4)

Die Cramersche Regel

i-te Spalte

$$A_i = \begin{pmatrix} \quad & b_1 & \quad \\ \quad & \vdots & \quad \\ \quad & b_n & \quad \end{pmatrix}$$

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$
- $A_i(b) = (a_1 \ \cdots \ b \ \cdots \ a_n)$

Satz

Sei A invertierbar, dann ist die eindeutige Lösung von

$$\boxed{Ax = b}$$

von der Gestalt

$$\underline{x_i} = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}.$$

Beispiel

$$\begin{array}{rcrcl} 3sx_1 & - & 2x_2 & = & 4 \\ -6x_1 & + & sx_2 & = & 1 \end{array}$$

Für welche Werte von s hat das obige System genau eine Lösung?

genau eine Lsg, wenn

$$\det \begin{pmatrix} 3s & -2 \\ -6 & s \end{pmatrix} \neq 0 \iff 3s^2 - 12 \neq 0$$

$$\iff s^2 - 4 \neq 0$$

$$\iff s \neq \pm 2$$

Beispiel

Jetzt mit Cramerscher Regel. Wie vorher:
genau eine Lsg, wenn Matrix invertierbar!

$$\begin{array}{rcrcl} 3sx_1 & - & 2x_2 & = & 4 \\ -6x_1 & + & sx_2 & = & 1 \end{array}$$

Für welche werte von s hat das obige System genau eine Lösung?

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\det\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & s \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{4s+2}{3s^2-12}$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\det\begin{pmatrix} 3s & 4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix}}{3s^2-12}$$

$\boxed{\text{genau eine Lsg wenn } s \neq \pm 2.}$

Die Adjungierte

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die *Adjungierte* von A ist die Matrix $\mathrm{adj}(A) \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\mathrm{adj}(A) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det \begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \end{array}$$

gestrichen.

Inversenformel

Satz 46
Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar, dann gilt

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\underline{\mathrm{adj}(A)}.}$$

$x_j = (B)_{ji}$

$$\boxed{z.z. \quad = \frac{1}{\det(A)} C_{ij}}$$

Beweis: Berechne A^{-1} mit $B = (b_1, \dots, b_n)$

b_i ist Lsg $A \cdot x = e_i$

$$\Rightarrow x_j = \frac{1}{\det(A)} \cdot \det(\ldots) \leftarrow i \stackrel{?}{=} C_{ij}$$

$$j \qquad = \underbrace{(-1)^{j+i} \cdot \det(A_{ij})}_{= C_{ij}}$$

Beispiel

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 4$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= (-1) \cdot (-9 - 5)$$

$$= 14$$

$$(A^{-1})_{13} = \frac{1}{\det(A)} \cdot C_{31} = \frac{4}{14}.$$

Vektorräume

Definition

Ein *Vektorraum* ist eine nichleere Menge $V \neq \emptyset$ von Objekten, gennant *Vektoren*, mit zwei Operationen, genannt *Addition* und *Multiplikation mit einem Skalar*, sodass die folgenden Axiome für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $u, v \in V$ gelten:

1. $u + v \in V$. $+$ $=$
2. $u + v = v + u$ Kommutativität.
3. $(u + v) + w = u + (v + w)$.
4. Es gibt ein Element $\mathbf{0} \in V$ mit $u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u = u$. (Nullelement) $0 =$
5. Es existiert ein $w \in V$ mit $u + w = \mathbf{0}$. Man bezeichnet w auch mit $-u$. $+$ $=$
6. $\alpha \cdot u \in \cancel{\mathbb{R}}\, V$.

$3 \cdot$ $=$

6. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
7. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u.$
8. $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\,\beta) \cdot u$
9. $1 \cdot u = u$

Ausserdem ist $\mathbb{R}^n$ mit bisheriger Skalarmultiplikation ein Vektorraum.

Auch diese Axiom gelten

für $V = \{ \quad \}$

$+:$ $+$ $=$

$\cdot:$ $\alpha \cdot$ $=$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}.$

Vektorraum.

Hilfsatz: Sei $(V,+,\cdot)$ ein Vektorraum. Für alle $v \in V$ gibt es genau ein $u \in V$ mit $u+v = v+u = 0$

Beweis: Seien $u, u' \in V$ mit

$$v+u = 0$$
$$v+u' = 0$$

z.z. $u = u'$.

$$v+u = 0 \quad | +u'$$

$$\underbrace{u'+v}_{=0} + u = 0 + u' = u'$$

$$\Rightarrow u = u' \quad \square$$

Satz 47

Für alle $u \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten:

i) $0 \cdot u = \mathbf{0}$.

ii) $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

iii) $-u = (-1) \cdot u$.

Beweis: i)

$$0 \cdot u = (0+0)\cdot u = 0\cdot u + 0 \cdot u \quad | + \text{inversem El. von } 0\cdot u: (w)$$

$$\underbrace{w + 0\cdot u}_{=0} = \underbrace{w + 0 \cdot u}_{=0} + 0 \cdot u \Rightarrow 0 \cdot u = 0$$

ii) $\alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0} \Rightarrow \alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$

iii) $\mathbf{0} = 0 \cdot u = (1-1)u = 1 \cdot u + (-1)\cdot u \overset{\text{Hilfsatz}}{\Rightarrow} -u = (-1)\cdot u \quad \square$

Beispiel

α Polynome aus $\mathbb{R}[X]$ vom Grad ≤ 2.

$V = \{p(x) : p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ mit $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation.

$\oplus$ $p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$, $q(x) = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2$

$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + x \cdot (a_1 + b_1) + x^2 (a_2 + b_2)$

$\odot$: $\alpha \cdot p(x) = \alpha \cdot a_0 + \alpha \cdot a_1 x + \alpha \cdot a_2 x^2$.

entspricht Skalarmultiplikation im $\mathbb{R}^3$. $\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_0 \\ \alpha \cdot a_1 \\ \alpha \cdot a_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (V, \oplus, \odot)$ ist ein Vektorraum.

Beispiel

$\boxed{V} = \{p(x) : p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ mit $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ $a_2 \neq 0\}$ mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation.

Vektorraum?

Nein, denn $(V, \oplus, \odot)$

hat keinen Nullvektor $\mathcal{O}$.

$p(x) = 1 + x + x^2 + \mathcal{O} = 1 + x + x^2$

$\Rightarrow \mathcal{O} = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \notin V.$

Beispiel

Für $n \geqslant 0$ sei $\mathbb{P}_n$ die Menge der Polynome vom Grad $\leqslant n$.

$\oplus$ $\quad p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$

$p(x) \oplus q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \dots + (a_n + b_n) x^n.$

$\odot$ $\quad \alpha \cdot p(x) = \alpha \cdot a_0 + \alpha \cdot a_1 x + \dots + \alpha \cdot a_n x^n.$

$p(x)$ wird durch $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ eindeutig bestimmt.

$\oplus, \odot$ entsprechen der Addition und Skalarmultiplikation im $\mathbb{R}^{n+1}$

Unterräume

Definition

Ein *Unterraum* des Vektorraums V ist eine Teilmenge $H \subseteq V$ mit

a) $\mathbf{0} \in H$

b) Für alle $u, v \in H$ gilt $u + v \in H$.

c) Für alle $u \in H$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\alpha \cdot u \in H$.

Abgeschlossenheit bzgl. $\oplus$, $\odot$

Beispiele

$(V, \oplus, \odot)$ Vektorraum.

ist kein TM.

$\# = 3$

1. $\{0\}$ Unterraum von V (✓)
2. $\mathbb{R}^2$ Unterraum von $\mathbb{R}^3$? Nein! da $\mathbb{R}^2 \not\subseteq \mathbb{R}^3$
3. $\mathbb{P}_2$ Unterraum von $\mathbb{P}_3$? Ja!
4. $\mathbb{Q}$ Unterraum von $\mathbb{R}$? Nein, denn $\sqrt{2} \cdot 1 \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$ keine Abg. bzg. $\odot$

Das Erzeugnis

Sei V ein Vektorraum und $v_1, ..., v_p \in V$. Analog zu $\mathbb{R}^n$ definieren wir

- $\text{Span}\{v_1, ..., v_p\} \stackrel{.}{=} \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p \colon \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}\}$ *(Erzeugnis von $v_1, \ldots, v_p$.)* Menge aller Linearkombinationen.
- $v_1, \ldots, v_p$ sind *linear unabhängig*, wenn aus $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p = 0$ folgt, dass $\underline{\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0}$.

Erzeugnis ist Unterraum

$\mathbb{P}^2 = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$.

Satz 48

Sei V ein Vektorraum und $v_1, \ldots, v_p \in V$. Das Erzeugnis $\text{Span}\{v_1, \ldots, v_p\}$ ist ein Unterraum von V.

Analog zu $\mathbb{R}^n$ definieren wir:

- $\{v_1, \ldots, v_p\}$ ist *Basis* von V, falls $\{v_1, \ldots, v_p\}$ linear unabhängig und $\text{Span}\{v_1, ..., v_p\} = V$.

$\mathbb{P}^2$: Basis : $\{1, x, x^2\}$

$3 + 2x + 4x^2 = 3 \cdot (1) + 2 \cdot (x) + 4 \cdot (x^2)$

$\cancel{\mathbb{R}^2}$ $\mathbb{P}^2$: $\text{Span}\{1 + x, 1 - x, x^2\} = \mathbb{P}^2$

Ja, denn $\{1, x, x^2\} \subseteq \text{Span}(1 \ldots)$

Beispiele

i) $\mathbb{P}_2 = \text{span}\{1, x, x^2\}$

ii) $\mathbb{R}^n = \text{Span}\{e_1, \dots, e_n\}$