Heute (28.10.2014):

- Textbuch Kapitel 3.1, 3.2
- Erinnerung: Determinante
- Determinante: Rekursive Definition
- 2×2-Matrizen
- Co-Faktoren
- Cramersche Regel
- Die Adjungierte

Erinnerung

Sei $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ mit Eigenschaften:

i) $\det(I_n) = 1$

ii) Ist $\mathrm{Rang}(A) < n$, dann gilt $\det(A) = 0$

iii) $\det(A)$ ist *linear* in jeder Zeile.

$T_i(x) := \det\begin{pmatrix} \boxed{} \\ x_1 \cdots x_n \\ \boxed{} \end{pmatrix}$ linear!

$T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Erinnerung

Sei $\det : \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften ii. und iii. Dann gelten die folgenden Aussagen:

a) Verwandelt man A durch Vertauschen zweier Zeilen in A', dann gilt

$$\det(A) = -\det(A').$$

b) Verwandelt man die Matrix A durch Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile in A', dann gilt

$$\det(A) = \det(A').$$

A hat Nullzeile

$$\det(A) = 0$$

Linearität.

$\Downarrow$

$$\det\begin{pmatrix} \square \\ 0\;0\;0\;0\;0 \\ \square \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \square \\ \lambda(0, \ldots, 0) \\ \square \end{pmatrix} = \lambda \det\begin{pmatrix} \square \\ 0 \cdot\cdot 0 \\ \square \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 2 \quad \Rightarrow \quad \det\begin{pmatrix} \square \\ 0\;0\;0\;0 \\ \square \end{pmatrix} = 0$$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Dreiecksmatrix

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} \overset{?}{=} \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

b)

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \dots = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn} \cdot \det(I_n)$$

Ein Algorithmus zum Berechnen der Determinante

Starte mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Überführe in ZSF durch

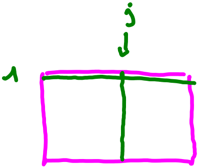
Ersetzungsop. $\rightsquigarrow \begin{pmatrix} a'_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a'_{nn} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \det(A) = \prod_{i=1}^{n} a'_{ii}$$

Definition

- Die Determinante einer 1×1-Matrix ist der einzige Eintrag dieser Matrix   Bsp. $\det(3) = 3$, $\det(-1) = -1$
- Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $n \geqslant 2$ ist die Determinante von A

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \cdot \det(A_{1j})$$



wobei die $n-1 \times n-1$-Matrix A_{1j} durch Streichen der ersten Zeile und j-ten Spalte hervorgeht.

$$A \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} \qquad A_{13} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{1,2} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Sei det so definiert.

i) $\det(I_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \cdot (I_n)_{1j} \cdot \det\left[(I_n)_{1,j}\right]$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & \ddots \; 1 \end{pmatrix}$$

$= (-1)^{1+1} \cdot (1) \cdot \det(I_{n-1})$

$= \dots = 1.$

$\Rightarrow$ es gilt $\det(I_n) = 1$ $\Rightarrow$ i).

Frage: Ist so definierte Determinante linear in jeder Zeile?

- Nehmen wir an, die i-te Zeile ist unbestimmt.
- In dem wir einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ dann als i-te Zeile von A verstehen, erhalten wir eine Matrix $A_{(i,x)}$ und somit eine Abbildung:

$$\begin{aligned} T_i : \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \det(A_{(i,x)}). \end{aligned}$$

$\det \begin{pmatrix} \boxed{} \\ x_1 \dots x_n \\ \boxed{} \end{pmatrix}$ ist linear Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Linearität der Determinante

Satz 31

Die Abbildung $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung.

Eigentlich beweist man dies per Induktion. Wir führen den Nachweis für $n = 1, 2, 3$. Alle Ideen für den allgemeinen Beweis sind hier schon vorhanden.

$n = 1$: *Was ist in diesem Fall $T_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?*

$A \in \mathbb{R}^{1\times 1}$ hat eine Zeile. $T_1 : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}$

$T(x) = x$ linear! ($\checkmark$)

$n = 2$: Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ zz:

$T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ c & d \end{pmatrix}$ und $T_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$

Sind linear.

$$T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ c & d \end{pmatrix} = x_1 \cdot \det(d) - x_2 \det(c)$$
$$= x_1 \cdot d - x_2 \cdot c$$
$$= (d \; -c) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

linear!

da $T(x) = A \cdot x$ linear! ✓

$$T_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = a \cdot \det(x_2) - b \cdot \det(x_1)$$
$$= a \cdot x_2 - b \cdot x_1 = (-b \; a) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ ✓

$n = 3$:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

$$T_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \cdot \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - x_2 \det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix}$$

$$+ x_3 \cdot \det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix} =$$ ← linear, da Matrix-Vektor Produkt!!

det erfüllt gewünschte Eigenschaften

Satz 32

i) $\det(I_n) = 1$

ii) *Ist* $\mathrm{Rang}(A) < n$, *dann gilt* $\det(A) = 0$ noch zu zeigen.

iii) $\det(A)$ *ist linear in jeder Zeile.*

zu ii) Annahme Zeile $a_i \in \mathrm{span}\{a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n\}$ Matrix hat 2 gleiche Zeilen

Also: $a_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j a_j \quad , \lambda_j \in \mathbb{R}$

Linearität in der i-ten Zeile

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} \square \\ a_i \\ \square \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \square \\ \sum \lambda_j a_j \\ \square \end{pmatrix} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \lambda_j \det\begin{pmatrix} \square \\ a_j \\ \square \end{pmatrix}$$

ZZ: Wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zwei gleiche Zeilen, dann gilt

$$\sum_{j=1}^{n} a_{1j} (-1)^{j+1} \cdot \det(A_{1j}) = 0.$$

Induktion: **$n=2$** $\det\begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = a \cdot b - a \cdot b = 0$ (✓)

$n-1 \to n$: **1. Fall:** Die erste Zeile gibt es nur einmal.

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} (-1)^{j+1} \cdot \det(\underbrace{A_{1j}}_{\substack{\in \mathbb{R}^{n-1 \times n-1}, \text{ hat} \\ 2 \text{ gleiche Zeilen.}}}) \overset{\text{I.V.}}{=} 0$$

I.V. gilt $\det(A_{1j}) = 0$

2. Fall: Die erste Zeile gibt es 2 mal.

Annahme, die ersten beiden Zeilen sind gleich.

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1 & \cdots & y_n \\ & B & \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{n \times n}}$$

Welchen Vorfaktor hat $y_1 y_2$ in $\det(A)$?

$$\det\begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1 & \cdots & y_n \\ & B & \end{pmatrix}$$

$$\det(B_{12}) \cdot (-1)^{1+1} (-1)^{(1+1)}$$

$$+ \underline{\det(B_{12}) (-1)^{2+1} \cdot (-1)^{1+1}} = 0$$

$$\det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ & & B & \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}} y_j \cdot y_k (-1)^{k+j+2} \cdot \det(B_{jk})$$

Da $B_{jk} = B_{kj}$ und $(-1)^{k+j+2} \cdot (-1)^{k+j+2} = 1$