Heute (23.10.2014):

- Textbuch Kapitel 2.9, 3.1, 3.2
- Koordinaten
- Rang einer Matrix
- Determinante
- Theoretische Vorbetrachtungen
- Rekursive Definition

Koordinaten

- $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_p\}$ Basis des Unterraums $H \subseteq \mathbb{R}^n$ $\dim(H) = p$
- $u \in H$ ist *eindeutig* durch Gewichte $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ mit

$$u = \alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_p b_p$$

festgelegt.

Wo nachweil zur Eindeutigkeit der $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$.

Wenn $\beta_1 b_1 + \ldots + \beta_p \cdot b_p = u \Rightarrow (\alpha_1 - \beta_1) b_1 + \ldots + (\alpha_p - \beta_p) b_p = 0$

$\Rightarrow \alpha_i = \beta_i \quad i = 1, \ldots, p$

Koordinaten

Definition

Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_p\}$ eine Basis des Unterraums H und sei $x \in H$. Die *Koordinaten* von x bzgl. $\mathcal{B}$ sind die Gewichte $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ mit

$$\underline{x} = \underline{\alpha_1} b_1 + \cdots + \alpha_p b_p.$$

$(b_1 b_2 \cdots b_p)\, y = x$

Der Vektor

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \underline{\alpha_1} \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$$

heisst *Koordinatenvektor* von x bzgl. $\mathcal{B}$.

Beispiel

$\mathcal{B} = \{b_1, b_2\}$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$H = \operatorname{span}\{b_1, b_2\}$.

$[x]_{\mathcal{B}}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 0 & 10 \\ 6 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 7 \\ \uparrow & \uparrow & \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Rang einer Matrix

Definition

Der *Rang* einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist die Dimension von $\mathrm{col}(A)$. $\subseteq \mathbb{R}^m$

Beispiel: $\mathrm{col}(A) = \{ A \cdot x \; : \; x \in \mathbb{R}^n \}$

$b \in \mathrm{col}(A)$

$A \cdot x = b$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 & -3 & 9 \\ 6 & 9 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & -9 & 6 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Dim}(\mathrm{col}(A)) =$ Anzahl Pivotspalten.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -4 & 8 \\ 0 & -3 & 2 & 5 & -7 \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix} \rightsquigarrow$$

Rang und Basisvariablen

Satz 27

Der Rang einer Matrix A ist die Anzahl der Pivotspalten in einer Zeilenstufenform von A.

Beweis: Siehe letzte VL.

Anzahl.

Letzte Vorlesung: $\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(A)) = \#$ freie Variablen

$= \#$ Nichtpivotspalten.

Dimension von Bild und Kern

Satz 28

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. *Es gilt* $\underbrace{\mathrm{Rang}(A)}_{\dim(\mathrm{col}(A))} + \dim(\ker(A)) = \underline{n}$.

<u>Beweis:</u> # Pivotspalten + # Nichtpivotspalten

= # Spalten

$\blacksquare$

Basissatz

[redacted]

Sei $H \subseteq \mathbb{R}^n$ ein p-dimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Es gilt

a) *Eine p-elementige Teilmenge $\{h_1, \ldots, h_p\} \subseteq H$ linear unabhängiger Vektoren aus H ist eine Basis von H.*

b) *Wenn das Erzeugnis einer p-elementigen linear unabhängigen Teilmenge H ist, dann ist diese Menge eine Basis von H.*

Satz 19 (Ergänzung)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent zur Eigenschaft, dass A invertierbar ist.

m) Die Spalten von A sind eine Basis des $\mathbb{R}^n$

n) $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^n$

o) $\mathrm{Rang}(A) = n$

p) $\ker(A) = \{0\}$

q) $\dim(\ker(A)) = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

invertierbar?

3. Zeile ist Summe der ersten beiden Zeilen.

$\Rightarrow$ Mindestens eine Spalte ist Nichtpivotspalte

$\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}(A) \neq \{0\}$ $\Rightarrow$ Nicht inv.bar.

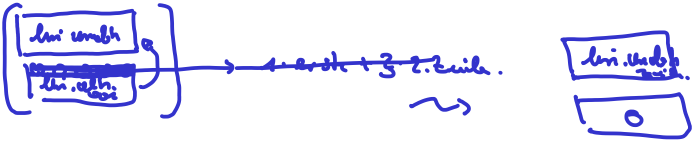
Max Anzahl lin. unabh. Zeilen = max. Anzahl lin. unabh. Spalten.

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

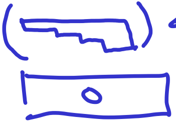
$\dim(\mathrm{Col}(A))$ = # Pivotspalten. => # Pivotspalten = max # lin. unabh. Spalten.

Nichtnullzeilen in ZSF(A) = Max # lin. unabh. Zeilen von (A).

↳ # Pivotspalten.



ZSF $\rightsquigarrow$



← keine Nullzeile.

<u>Übungsaufgabe:</u> Seien $\{v_1, \dots, v_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ lin. unabh.

Sei $v_i' = v_i + \lambda \cdot v_j$ mit $i \neq j$, $\lambda \in \mathbb{R}$

oder $v_i' = \lambda \cdot v_i$ mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

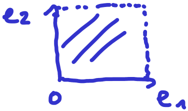
Dann ist $\{v_1, \dots, v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, \dots v_r\}$ lin. unabh.

Flächeninhalt von Parallelogrammen

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Der Flächeninhalt des Parallelogramms, welches von $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ aufgespannt ist, 1
- Sind $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig, dann ist Flächeninhalt $= 0$.

$\mathbb{R}^2$



$F = 1$

$\mathbb{R}^3$

2^3

$F = 1$

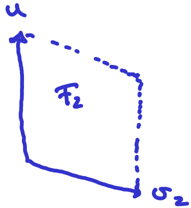
$\mathbb{R}^4$

16 Ecken

2^4

$F = 1.$

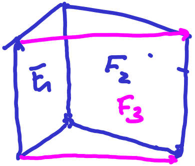
Flächeninhalt von Parallelogrammen

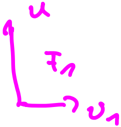


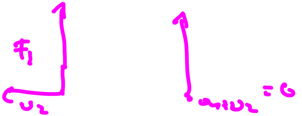
Betrachte Parallelogramm, welches

$u, v_1 + v_2$

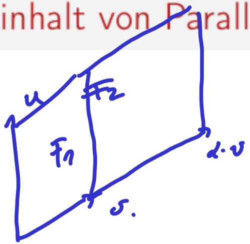
$$F_3 = F_1 + F_2 .$$







Flächeninhalt von Parallelogrammen

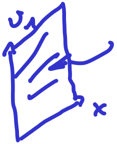


$\alpha \cdot v$.

$F_2 = \alpha \cdot F_1$.

Flächeninhalt von Parallelogrammen

- Betrachte Vektoren $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathbb{R}^n$
- Mit $x \in \mathbb{R}^n$ sei $F(x)$ Flächeninhalt vom Parallelogram, welches von aufgespannt $v_1, \ldots, v_{n-1}, x$ wird.
- Die Funktion $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung



$F(x)$

$x \in \mathbb{R}^2$?

lineare Abb.

$\det: \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}.$

$$\left| \det \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_{n-1}^T \\ x^T \end{pmatrix} \right| = |F(x)|$$

Determinante: Erwünschte Eigenschaften

det: $\mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ hat Eigenschaften:

i) $\det(I_n) = 1$

ii) Ist $\mathrm{Rang}(A) < n$, dann gilt $\det(A) = 0$

iii) $\det(A)$ ist *linear* in jeder Zeile.

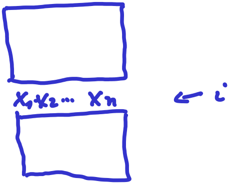
Frage: Gibt es eine solche Abbildung?

Antwort: Das nächste Teil!

Linearität in jeder Zeile

- Nehmen wir an, die i-te Zeile ist unbestimmt.
- In dem wir einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ dann als i-te Zeile von A verstehen, erhalten wir eine Matrix $A_{(i,x)}$ und somit durch $\det$ eine Abbildung:

$$
\begin{array}{rccc}
T_i: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& \underline{x} & \longmapsto & \underline{\det}(A_{(i,x)}).
\end{array}
$$



$\underline{A_{(i,x)}}$

Zeilen der Matrix $A_{(i,x)}$ sind aufspannende Vektoren eines Parallelogramms.

Die Linearität in jeder Zeile ist durch Flächeninhaltsvorbetrachtungen erwünscht.

Linearität der Determinante

Linearität in jeder Zeile

Die Abbildung $T_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine *lineare Abbildung* für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Hilfssatz

Satz 30

Sei $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ *eine Abbildung mit den Eigenschaften ii, und iii. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

a) *Verwandelt man* A *durch Vertauschen zweier Zeilen in* A'*, dann gilt*

$$\det(A) = -\det(A').$$

b) *Verwandelt man die Matrix* A *durch Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile in* A'*, dann gilt*

$$\det(A) = \det(A').$$

Beweis: b)

z.z. $\det(A) = \det(A')$

$$A = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i1} \cdots\ a_{in} \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i1}+\alpha \cdot a_{j1} \cdots \cdots\ a_{in}+\alpha \cdot a_{jn} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$\det(A') = \underbrace{\det \begin{pmatrix} \vdots \\ a_{i1} \cdots a_{in} \\ \vdots \end{pmatrix}}_{\det(A)} + \underbrace{\det \begin{pmatrix} \vdots \\ \alpha a_{j1} \cdots \alpha a_{jn} \\ \vdots \end{pmatrix}}_{=0 \text{ da } \operatorname{rang} < n.}$$

(2).

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\quad} \\ a_i^T \\ \boxed{\quad} \\ a_j^T \\ \boxed{\quad} \end{pmatrix}}_{A} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\quad} \\ a_j^T \\ \boxed{\quad} \\ a_i^T \\ \boxed{\quad} \end{pmatrix}}_{A'}$$

z.z. $\det(A) = -\det(A')$

$$\det(A) = \det \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\quad} \\ a_i^T + a_j^T \\ \boxed{\quad} \\ a_j^T \\ \boxed{\quad} \end{pmatrix}}_{M_1}, \qquad \det(A') = \underbrace{\begin{pmatrix} \boxed{\quad} \\ a_j^T + a_i^T \\ \boxed{\quad} \\ a_i^T \\ \boxed{\quad} \end{pmatrix}}_{M_2}$$

$$\det(A) + \det(A') = \det(M_1) + \det(M_2) = \det \begin{pmatrix} \boxed{\quad} \\ a_i^T + a_j^T \\ \boxed{\quad} \\ a_j^T + a_i^T \\ \boxed{\quad} \end{pmatrix} = 0$$

Was wissen wir jetzt?

1. Wir kennen wichtige Eigenschaften, die $\det$ erfüllen muss.
2. Wenn es $\det$ gibt, wissen wir wie man $\det$ berechnet.
3. *Wir wissen noch nicht*, ob $\det$ existiert.

Transformation vom Typ (Ersetze Zeile durch Zeile + Vielf. andere Zeile)

$$A \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = a_{11} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

invertibar

$$= \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Wenn A nicht invertibar, $\det(A) = 0$.

$\blacksquare$