Lineare Algebra

Heute (21.10.2013):

- Textbuch Kapitel 2.8, 2.9, 3.1
- Unteräume
- Kern und Spaltenraum
- Dimension und Rang

Unterräume

Definition

Ein *Unterraum* des $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge $H \subseteq \mathbb{R}^n$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

i) Der Nullvektor 0 ist ein Element von H.
ii) Für alle $u, v \in H$ gilt $u + v \in H$ Abgeschlossen mit bzgl. $+$
iii) Für alle $u \in H$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\alpha \cdot u \in H$. Abgeschlossen mit bzgl. Skalarmultiplikation.

Beispiel

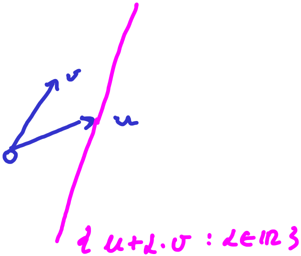
- Seien $u, v \in \mathbb{R}^n$
- Sei $H = \text{Span}\{u, v\}$
- H ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$

<u>Allgemeiner:</u> $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$, dann

Span$\{v_1, \dots, v_p\}$ Unterraum von $\mathbb{R}^n$

Beispiel 2

- Seien $u \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n$ beide $\neq 0$
- Wann ist $\{u + \alpha \cdot v \colon \alpha \in \mathbb{R}\}$ ein Unterraum?



$\{u+\alpha\cdot v : \alpha\in\mathbb{R}\}$ Unterraum des $\mathbb{R}^n$ $\Leftrightarrow$ $u \in \operatorname{Span}\{v\}$.

Beispiel

- $u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{R}^n$
- $H = \operatorname{Span}\{u_1, \ldots, u_p\}$ ist Unterraum des $\mathbb{R}^n$, der von $u_1, \ldots, u_p$ *erzeugt* wird.

Definition: Sei $H \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$ und $u_1, \ldots, u_p \in H$. $\{u_1, \ldots, u_p\}$ ist ein Erzeugendensystem von H, wenn $\operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_p\} = H$.

Wir sagen $\{u_1, \ldots, u_p\}$ erzeugt H.

Spaltenraum

Definition

Sei $A = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit Spalten $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^m$.
Der *Spaltenraum* ist das Erzeugnis der Spalten von A

$$\mathrm{Col}(A) = \{\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

Bemerkung: $\mathrm{Col}(A)$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^m$.

Column $\overset{\text{eng.}}{=}$ Spalte

Beispiel

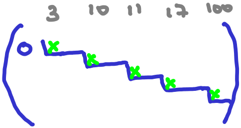
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{col}(A) = \{ A \cdot x : x \in \mathbb{R}^4 \}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 3x_3 + 4x_4 \\ 2x_1 + x_2 \qquad\quad + 2x_4 \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 7x_4 \end{pmatrix} : x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Frage:

$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow$ ZSF:



$P \subseteq \{1, \ldots, n\}$ ist die Menge der Indizes der Pivot-Spalten.

$I = \{3, 10, 11, 17, 100\}$.

Möglichst kleine Menge von Spalten von A, die Col(A) erzeugen:

$$V = \{ a_i : i \in I \}, \text{ wobei } A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Noch einmal: $\ker(A)$

Erinnerung:

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- $\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$

Satz 23

$\ker(A)$ *ist ein Unterraum des* $\mathbb{R}^n$

Bemerkung: $\emptyset$ ist keine Unterraum des $\mathbb{R}^n$ da $0 \notin \emptyset$.

Beweis: $\text{Kern}(A) \subseteq \mathbb{R}^n$

i) $0 \in \text{Ker}(A)$, da $A \cdot 0 = 0$

ii) Wenn $u, v \in \text{Ker}(A)$, dann gilt auch $u+v \in \text{Ker}(A)$, da

$$A(u+v) = A\cdot u + A v = 0 + 0 = 0$$

iii) Sei $u \in \text{Ker}(A)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gilt $A(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot A \cdot u = \lambda \cdot 0 = 0$

und somit $\lambda \cdot u \in \text{Ker}(A)$.

Basis eines Unterraums

Definition

Sei $H \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$. Eine Basis von H ist eine Menge linear unabhängiger Vektoren $\{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq H$ mit

$$\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_p\} = H$$

Bsp: $H = \left\{ \begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Basis von H: $\left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$

denn $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ sind l.u. und beliebiger Vektor $\begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix} \in H$: $\begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix} = x \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + y \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Hat jeder Unterraum $H \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Basis?

Die Antwort auf diese Frage ist: "Ja"

Beweisidee:

- Wir wissen: Wenn $\{v_1, \ldots, v_p\} \subset \mathbb{R}^n$ linear unabhängig, dann gilt $p \leqslant n$.
- Wir zeigen gleich: Wenn $B = \{v_1, \ldots, v_p\} \subset H$ linear unabhängig und keine Basis von H, dann existiert ein $v^* \in H$ mit $\{v_1, \ldots, v_p, v^*\}$ linear unabhängig.
- Wir setzen dann $B = \{v_1, \ldots, v_p, v^*\}$ und wiederholen diesen Ersetzungsschritt solange, bis B eine Basis ist.
- Wenn man mit $B = \{v\}$ mit einem Beliebigen Vektor $0 \neq v \in H$ startet erhält man nach höchstens $n - 1$ vielen Schritten eine Basis.

Satz 24

Seien $\{v_1, .., v_p\}$ *linear unabhängig und* $v^* \notin \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_p\}$, *dann ist* $\{v_1, \ldots, v_p, v^*\}$ *linear unabhängig.*

<u>Beweis:</u> Annahme $v_1, v_2, \ldots, v_p, v^*$ sind linear abhängig. D.h. es existieren $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \alpha^* \in \mathbb{R}$ mit

i) $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_p v_p + \alpha^* v^* = 0 \quad (*)$

ii) nicht alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \alpha^*$ gleich 0.

Kann $\alpha^* = 0$ gelten? Nein, denn sonst ist $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_p v_p$ eine nicht triviale LK der 0 und somit $v_1, \ldots, v_p$ l. A.

Teile die durch $-\alpha^*$. Somit gilt $-\frac{\alpha_1}{\alpha^*} v_1 - \ldots - \frac{\alpha_p}{\alpha^*} v_p = v^*$

↯ zu $v^* \notin \operatorname{Span}\{v_1, \ldots, v_p\}$ ∎

Basissatz

Satz 25
Ein Unterraum $\{0\} \neq H \subseteq \mathbb{R}^n$ hat eine Basis.

Beweis: Beginne mit $v_1 \in H \setminus \{0\}$ und setze $B = \{v_1\}$.

Solange $\operatorname{span}(B) \subsetneq H$.

setze $B := B \cup \{v^*\}$ mit $v^* \in H \setminus \operatorname{span}(B)$

Satz 24: B ist immer eine Menge linear unabhängiger Vektoren.

Da $|B| \leq n$ terminiert der Alg. mit Basis von H.

Satz 26

Sei $H \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Unterraum und $\{b_1, \ldots, b_k\}$ und $\{c_1, \ldots, c_l\}$ zwei Basen von H. Dann gilt $k = l$.
Jede Basis von H hat also immer gleich viele Elemente.

<u>Beweis:</u> Sei $B = (b_1, \ldots, b_k)$. Da $\forall i \in 1, \ldots, l$ $c_i \in \operatorname{span}\{b_1, \ldots, b_k\}$ gilt, existieren Vektoren $\lambda_i \in \mathbb{R}^k$ mit $c_i = B \cdot \lambda_i$. Betrachte Matrix $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \in \mathbb{R}^{k \times l}$.

Dann gilt $(c_1, \ldots, c_l) = B \cdot \lambda$

Wenn $l > k$ $\boxed{\quad\lambda\quad}$ dann gilt $\operatorname{Kern}(\lambda) \supsetneq \{0\}$.

d.h. $\exists\, x \in \mathbb{R}^l$, $x \neq 0$ mit $\lambda \cdot x = 0$. $(c_1, \ldots, c_l) \cdot x = B \cdot \overbrace{\lambda \cdot x}^{=0} = 0$ ↯

zu $\{c_1, \ldots, c_l\}$ lin. unabh.

Dimension

Definition

Die *Dimension* eines Unterraums $H \neq \{0\}$, $\dim(H)$ ist die Anzahl von Vektoren in einer Basis von H.

Die Dimension des Unterraums $\{0\}$ ist 0.

Basis von $\ker(A)$

$\mathrm{Ker}(A) = \{x \in \mathbb{R}^4 : A \cdot x = 0\}.$

Bsp.

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 0 \\ 1 & 5 & 8 & 8 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 7 \\ 0 & \underline{1} & 0 & -3 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 2 \end{pmatrix} = A'$$

$\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A')$

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ x_4 \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

<u>x_4 freie Variable:</u>

$x_3 = -2x_4$

$x_2 = 3x_4$

$x_1 = -7 \cdot x_4$

$$\text{Basis } \mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Basis von $\ker(A)$

$$A \xrightarrow{\text{red. ZSF.}} \begin{array}{cccccc} & & & & & \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array}$$

Frei: x_4, x_6, x_1

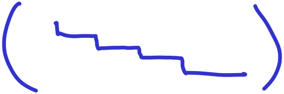
$$\mathrm{Kern}(A) = x_4 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + x_6 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -7 \\ 0 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} + x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_3}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ l. unabh.}$$

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ l.u.

Basis von col(A)

Rezept: $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$,

$\hookrightarrow$ 

Pivotspalten $I \subseteq \{1, \dots, n\}$.

$\Rightarrow \{a_i : i \in I\}$ Basis von col(A).

Basis von $\operatorname{col}(A)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 8 & 11 & 15 \end{pmatrix} \overset{\text{elem. Zeilenumf.}}{\leadsto} \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \underline{-1} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{ Basis } \operatorname{col}(A): \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right\}.$$