A vollem Zeilenrang.

$A = L \cdot U$

Heute (16.10.2013):

- Die LU-Faktorisierung
- Ein Algorithmus zur Berechnung der LU-Faktorisierung
- Block Matrizen
- Unterräume

Die LU-Zerlegung

$L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

linke untere

Dreiecksmatrix.

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine untere Dreiecksmatrix mit Diagonalelementen 1 und $U \in \mathbb{R}^{m\times n}$ in Zeilenstufenform. Dann heißt die Faktorisierung

$$A = L \cdot U$$

LU-Zerlegung von A.

LU-Zerlegung und Lösen von Gleichungssystemen

3* -2* *1 + + +

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & \boxed{-5} & 1 & 0 \\ \boxed{-3} & \boxed{8} & \boxed{3} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Voraussetzung: Zeilenstufenform nur durch Elementar Transf. vom Typ (I) berechnet!

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & & & \\ 2 & & & \\ -3 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 10 & 4 & -9 \\ 0 & -16 & -11 & 18 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ *5 \\ \\ \\ \end{array}$$

$*-8$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} *-3$$

Ein Algorithmus zur LU-Zerlegung

- Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- Starte mit $L = I_m$
- Reduziere A in Zeilenstufenform durch eine Folge von Ersetzungsoperationen (Typ 1 aus erster Vorlesung).
- Platziere Einträge in L, sodass die *selben* Operationen angewandt auf L am Ende I_m ergeben.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \\ + \end{matrix}$$

$A = I \cdot A$

Operation wird durch Elementarmatrix

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot A$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \\ + \end{matrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \cdot(-1) \; + \quad \cdot 3 \; +$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 12 & 4 & 12 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & 10 \\ 0 & 12 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & 10 \\ 0 & 12 & 4 & -5 \end{pmatrix} \quad {*3} \quad {*-4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1, & a_2 + 2 \cdot a_3, & a_3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Blockmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & -1 & 11 \\ 2 & -2 & 3 & -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

2×3 Blockmatrix

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_{1j} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A_{2j} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$$

Blockmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & -1 & 11 \\ 2 & -2 & 3 & -4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

2×3 Blockmatrix

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

$A_{1j} \in \mathbb{R}^{1 \times ?}$

$A_{2j} \in \mathbb{R}^{2 \times ?}$

Blockzerlegung

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & -1 & 11 \\ 2 & -2 & 3 & -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$$

- Matrizen $A_{ij}, j = 1, \ldots, 3$ haben alle dieselbe Anzahl Zeilen i fest
- Matrizen $A_{ij}, i = 1, \ldots, 3$ haben alle dieselbe Anzahl Spalten j fest

Addition von Blockmatrizen

- $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ auf dieselbe Art und Weise Zerlegt
- $A + B$ ergibt sich aus der Summe der jeweiligen Blöcke

$$\left(\begin{array}{cc|cc|c} 2 & 1 & 3 & 4 & -2 \\ \hline 1 & 2 & 9 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \end{array}\right)$$

$$= \begin{array}{cc|cc|c} & & & & \\ \hline & & 17 & 9 & \\ & & 14 & 16 & \end{array}$$

$A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zum Berechnen von

$A \cdot B$ benötigt man, wenn man naiv ist,

Multiplikationen in $\mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} A \cdot B \\ \square \\ \quad\quad\quad\quad {}_{ij} \end{pmatrix}$$

n Multiplikationen.

n^3 Multiplikationen.

Volker Strassen 70'er.

$n^{2,7\ldots}$

Multiplikation von Blockmatrizen

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 \end{pmatrix}$$

Spalten in A sind so partitioniert, wie Zeilen in B !

Beispiel:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ \hline 5 & 4 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 20 & 26 \\ 22 & 32 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{c} (2 \;\; 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 3 \cdot (5 \;\; 6) \\ \hline (5 \;\; 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + 1 \cdot (5 \;\; 6) \end{array}\right) = \begin{pmatrix} (5 \;\; 8) + (15 \;\; 18) \\ (17 \;\; 26) + (5 \;\; 6) \end{pmatrix}$$

Die Spalten-Zeilen Erweiterung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ e & f \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ 3a & 3b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3c & 3d \\ -c & -d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e & 2f \\ 2e & 2f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+3c+2e & \cdots \\ \vdots & \cdots \end{pmatrix}$$

Die Spalten-Zeilen Erweiterung

Definition
Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ dann bezeichnet $\mathrm{col}_j(A)$ die j-te Spalte von A und $\mathrm{row}_i(A)$ die i-te Zeile von A.

Satz 13
Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$, dann gilt

$$A \cdot B = \mathrm{col}_1(A) \cdot \mathrm{row}_1(B) + \cdots + \mathrm{col}_n(A) \cdot \mathrm{row}_n(B)$$

Inverse partitionierter Matrizen

Beispiel: Eine Matrix A von der Form

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

$A_{12} \in \mathbb{R}^{p \times q}$

ist in *oberer Block-Dreiecksform*. Wir nehmen an $A_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ und $A_{22} \in \mathbb{R}^{q \times q}$.

Sei nun A invertierbar. Wie sieht A^{-1} aus?

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

$B_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ $\quad B_{12} \in \mathbb{R}^{p \times q}$

$B_{22} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ $\quad B_{21} \in \mathbb{R}^{q \times p}$.

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$$

$$B_{11} \cdot A_{11} + B_{12} \cdot 0 = I_p$$

$$\boxed{B_{11} = A_{11}^{-1}}$$

Aussserdem: $B_{21} \cdot A_{11} + B_{22} \cdot 0 = 0 \Rightarrow B_{21} \cdot A_{11} = 0$

da A_{11} invertierbar folgt $\boxed{B_{21} = 0}$

Aussserdem: $\underbrace{B_{21}}_{=0} \cdot A_{12} + B_{22} \cdot A_{22} = I_q$

$\Rightarrow \boxed{B_{22} = A_{22}^{-1}}$

Aussserdem: $\underbrace{B_{11}}_{A_{11}^{-1}} \cdot A_{12} + B_{12} \cdot A_{22} = 0$

$B_{12} \cdot A_{22} = - A_{11}^{-1} \cdot A_{12}$

$\Rightarrow \boxed{B_{12} = - A_{11}^{-1} \cdot A_{12} \cdot A_{22}^{-1}}$

Unterräume

Definition

Ein *Unterraum* des $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge $H \subseteq \mathbb{R}^n$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:

i) Der Nullvektor 0 ist ein Element von H.

ii) Für alle $u, v \in H$ gilt $u + v \in H$

iii) Für alle $u \in H$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\alpha \cdot u \in H$.

Beispiel

- Seien $\overset{x,y}{\cancel{u,v}} \in \mathbb{R}^n$
- Sei $H = \mathrm{Span}\{\overset{x,y}{\cancel{u,v}}\}$ $= \{ \alpha \cdot x + \beta \cdot y \ : \ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$
- H ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^n$

Denn: i) $0 \in \mathrm{Span}\{x,y\}$ denn $0 = 0 \cdot x + 0 \cdot y$.

ii) Seien $u, v \in \mathrm{Span}\{x,y\}$. z.z.: $u + v \in \mathrm{Span}\{x,y\}$.

Es existieren $\alpha_u, \beta_u, \alpha_v, \beta_v \in \mathbb{R}$ mit $u = \alpha_u \cdot x + \beta_u \cdot y$, $v = \alpha_v \cdot x + \beta_v \cdot y$

es gilt $u + v = (\alpha_u + \alpha_v) x + (\beta_u + \beta_v) \cdot y \in \mathrm{Span}\{x,y\}$.

iii) Sei $u \in \mathrm{Span}\{x,y\}$. d.h. $\exists\ \alpha_u, \beta_u \in \mathbb{R}$ mit

$u = \alpha_u \cdot x + \beta_u \cdot y$. Es gilt $\alpha \cdot u = (\alpha \cdot \alpha_u) x + (\alpha \cdot \beta_u) \cdot y \in \mathrm{Span}\{x,y\}$

Beispiel 2

- Seien $u \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n$ beide $\neq 0$
- Wann ist $\{u + \alpha \cdot v \colon \alpha \in \mathbb{R}\}$ ein Unterraum?

$u \in \operatorname{Span}(v)$, dann ja!

denn dann ist

$\{u + \alpha \cdot v : \alpha \in \mathbb{R}\}$

$= \operatorname{Span}\{v\}$.

Wenn $u \notin \operatorname{Span}\{v\}$, dann gilt $0 \notin \{u + \alpha \cdot v : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Denn wenn $0 = u + \alpha \cdot v$ mit einem $\alpha \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $u \in \operatorname{Span}\{v\}$.

$\boxtimes$

Beispiel

- $u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{R}^n$
- $H = \operatorname{Span}\{u_1, \ldots, u_p\}$ ist Unterraum des $\mathbb{R}^n$, der von $u_1, \ldots, u_p$ *erzeugt* wird.

Spaltenraum

Definition

Sei $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ eine Matrix mit Spalten $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$.
Der *Spaltenraum* ist das Erzeugnis der Spalten von A

$$\mathrm{Col}(A) = \{\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

Bemerkung: $\mathrm{Col}(A)$ ist ein Unterraum des $\mathbb{R}^m$.