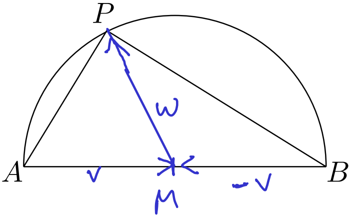
Lineare Algebra

Heute (08.10.2013):

- Beweise: Beispiele, Methoden, Werkzeuge
- Textbuch Kapitel 2.5, 2.4
- Elementare Matrizen
- Die LU-Faktorisierung
- Ein Algorithmus zur Berechnung der LU-Faktorisierung
- Block Matrizen

Satz des Thales

Alle Peripheriewinkel über einem Durchmesser sind rechte Winkel.



Voraussetzung: $u \cdot v = 0$ dann $u \perp v$

$\overrightarrow{AP} = v + w$

$\overrightarrow{BP} = -v + w$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = (v+w) \cdot (-v+w)$$

$$= -v \cdot v - \underbrace{w \cdot v}_{= v \cdot w} + v \cdot w + w \cdot w$$

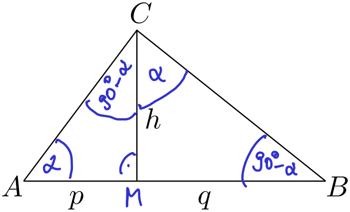
$$= \underbrace{w \cdot w}_{= r^2} - \underbrace{v \cdot v}_{= r^2} = 0$$

$\boxtimes$

Beispiele für Beweise

Satz

Sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck



Es gilt $h^2 = p \cdot q$.

Die Dreiecke AMC und CMB sind ähnlich (sie stimmen in allen drei Winkeln überein)

$\Rightarrow$ Verhältnisse der Seitenlängen sind gleich!

$$\Rightarrow \quad \frac{h}{p} = \frac{q}{h}$$

$$\Rightarrow \quad h^2 = p \cdot q$$

$\boxtimes$

Beispiele für Beweise

Arithmetisch-Geometrisches Mittel

Für alle $a, b \geq 0$ gilt:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}.$$

Variante 1:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b} \quad \overset{a,b\geq 0}{\Longleftrightarrow} \quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq a \cdot b$$

wahr

$$\Longleftrightarrow \quad a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab$$

$$\Longleftrightarrow \quad a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (a-b)^2 \geq 0$$

wahre Aussage

Variante 2:

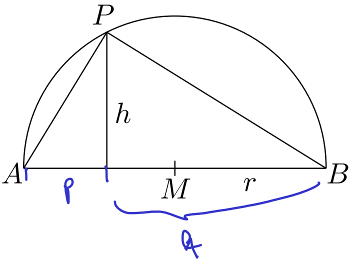
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\Longleftrightarrow \quad a+b \geq 2 \cdot \sqrt{a}\sqrt{b} \Longleftrightarrow (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

wahre Aussage $\blacksquare$

Beispiele für Beweise



Es gilt: $h \leq r$.

gilt von vorher (Voraussetzungen):

(i) Dreieck APB hat rechten Winkel bei P
(Satz des Thales)

(ii) In rechtwinkligem Dreieck: ⟵ (i)
$$h^2 = p \cdot q$$

(iii) Arithmetisch-Geometrisches Mittel
$(p, q \geq 0)$
$$\frac{p+q}{2} \geq \sqrt{p \cdot q}$$

Zusammengesetzt:

$$r = \frac{p+q}{2} \underset{\text{(iii)}}{\geq} \sqrt{p \cdot q} \underset{\text{(ii)}}{=} \sqrt{h^2} = h \quad \Rightarrow \quad r \geq h$$

$\boxtimes$

Beispiele für Beweise

Zu zeigen: $A \Rightarrow B$

äquivalent: $\underbrace{\neg B}_{\text{nicht } B} \Rightarrow \neg A$

Satz

Wenn $\underbrace{2^n - 1 \text{ Primzahl}}_{\text{Aussage } A}$ ist, dann ist $\underbrace{n \text{ Primzahl}}_{\text{Aussage } B}$.

Aussage $\neg B$: n ist keine Primzahl (Annahme/Voraussetzung)

$\Rightarrow$ dann ist n zusammengesetzt $* \; n = p \cdot q$

$a \equiv b \mod c$ bedeutet a und b lassen den selben Rest bei Div. durch c

Variante 1:

$$2^p - 1 \equiv 0 \mod (2^p - 1)$$

$$\Leftrightarrow 2^p \equiv 1 \mod (2^p - 1)$$

$$\Leftrightarrow (2^p)^q \equiv 2^{p \cdot q} \equiv (1)^q \equiv 1 \mod (2^p - 1)$$

$$\Leftrightarrow 2^n \equiv 1 \mod (2^p - 1)$$

$$\Leftrightarrow 2^n - 1 \equiv 0 \mod (2^p - 1)$$

Das heißt $(2^n - 1)$ ist durch $(2^p - 1)$ teilbar! $\Rightarrow (2^n - 1)$ ist keine Primzahl (Aussage $\neg A$)

Satz

Wenn $2^n - 1$ Primzahl ist, dann ist n Primzahl.

<u>Variante 2 :</u> (Faktorenzerlegung) Wenn $n = p \cdot q$, dann

$$2^n - 1 = (2^p - 1)\left(2^{p(q-1)} + 2^{p(q-2)} + \dots + 2^{p \cdot 1} + 1\right)$$

$\hookrightarrow (2^n - 1)$ ist zusammengesetzt, also insbesondere <u>keine</u> Primzahl (Aussage $\neg A$)

$\boxtimes$

Satz

Es seien a und b ganze Zahlen. Dann ist $3a+5b$ genau dann durch 7 teilbar, wenn $a+4b$ durch 7 teilbar ist.

Beweis: Voraussetzung: $a, b \in \mathbb{Z}$

(i) $7 \mid (3a+5b) \Rightarrow 7 \mid (a+4b)$ ← machen wir jetzt

(ii) $7 \mid (a+4b) \Rightarrow 7 \mid (3a+5b)$

Variante 1: (vollständige Fallunterscheidung)

Es reicht die Reste von $(3a+5b)$ bzw. $(a+4b)$ bei Division durch 7 zu betrachten.

b \ a	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	3	6	2	5	1	3	0
1	5	1	4	0	3	6	1	...
2	⋮	6						
⋮								

← $(3a+5b) \bmod 7$

Man prüft nach, dass für die 0 Paare $(a+4b)$ auch durch 7 teilbar ist.

Satz

Es seien a und b ganze Zahlen. Dann ist $3a+5b$ genau dann durch 7 teilbar, wenn $a+4b$ durch 7 teilbar ist.

Variante 2 (Linearkombination, clever)

$$2(3a+5b) + (a+4b) = \underbrace{7(a+2b)}_{\text{durch 7 teilbar}}$$

Das heißt, wenn einer der beiden Summanden der linken Seite durch 7 teilbar ist, dann ist es auch der andere!

$\boxtimes$

Beispiele für Beweise

Schubfachschluss: $n+1$ Elemente

n Schubfächer

$\Rightarrow \exists$ ein Schubfach mit mindestens 2 Elementen

Satz

Sei A eine Teilmenge von $\{1, \ldots, 2n\}$ mit $|A| = n + 1$. Dann gibt es immer zwei Zahlen in A, sodass eine der beiden ein Teiler der anderen ist.

Beweis: (Schubfachschluss)

Wir stellen jede Zahl a dar als $a = 2^k \cdot u_a$ wobei u_a ungerade Zahl und 2^k irgend eine 2er-Potenz.

Bsp:

$8 = 2^3 \cdot 1$ $\quad u_8 = 1$

$7 = 2^0 \cdot 7$ $\quad u_7 = 7$

$6 = 2^1 \cdot 3$ $\quad u_6 = 3$

Wie viele mögliche ungerade Zahlen u_a kann ich mit $\{1, \ldots, 2n\}$ erzeugen?

$\Rightarrow$ maximal n verschiedene.

$|A| = n+1 \Rightarrow$ es gibt zwei Elemente in A, p, q $(p > q)$ mit $u_p = u_q$

(Schubfachschluss)

$p = 2^i u_p$

$q = 2^j \cdot u_q$

$$\Rightarrow p = 2^i u_p = 2^i u_q = 2^{i-j}(2^j u_q) = 2^{i-j} q \Rightarrow q \mid p$$

∎

Elementare Matrizen

Erinnerung: Elementare Zeilenoperationen

i) Vertauschen zweier Zeilen (Zeile i mit Zeile j)

ii) Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\neq 0$

iii) Addition eines Vielfachen einer Zeile auf eine *andere* Zeile.

i)
$$
\begin{array}{c}
\left[\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
 & \ddots & & & \\
 & & 1 & & \\
 & — & e_j & — & \\
 & & 1 & & \\
 & & & \ddots & \\
 & & & 1 & \\
 & — & e_i & — & \\
 & & & 1 & \\
 & & & & \ddots \\
 & & & & 1
\end{array}\right]
\end{array}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

ii) Zeile i multipliziert mit α

$$
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & \alpha & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

iii) Addition von $\alpha \cdot$ Zeile i auf Zeile j

$$
\begin{array}{cc}
\left[\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
 & \ddots & & & \\
 & & 1 & & \\
 & \alpha & & 1 & \\
 & & & & \ddots \\
 & & & & & 1
\end{array}\right] &
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\
\end{array} \\
\begin{array}{ccccc}
 & \uparrow i & & &
\end{array} &
\end{array}
$$

Nacheinanderausführen von elementaren Zeilenoperationen

- Auf $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ werden Operationen $O_1, \ldots, O_k$ ausgeführt (in dieser Reihenfolge)
- Das Ergebnis ist $Erg \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- Seien $E_{O_1}, \ldots, E_{O_k} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ die elementaren Matrizen, die zu $O_1, \ldots, O_k$ gehören.

Dann ist $Erg = E_{O_k} \cdot \cdots \cdot E_{O_1} A$.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 10 & 4 & -9 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 10 & 4 & -9 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 10 & 4 & -9 \\ 0 & -16 & -11 & 18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 10 & 4 & -9 \\ 0 & -16 & -11 & 18 \end{pmatrix}$$

↳ erste Spalte von L in LU Faktorisierung

(→ Donnerstag)