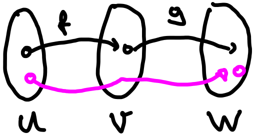
Heute (09.10.2014):

- Textbuch Kapitel 2.2, 2.3
- Erinnerung: Matrixmultiplikation und Hintereinanderausführung
- Die Umkehrabbildung
- Die Inverse einer Matrix
- Eine Formel für 2×2-Matrizen
- Ein Algorithmus zum Berechnen der Inversen
- Charakterisierung invertierbarer Matrizen
- Elementare Matrizen

Komposition von Funktionen/Abbildungen



$g \circ f : U \to W$

- U, V, W Mengen
- $f : U \to V$
- $g : V \to W$
- Die Funktion $g \circ f : U \to W$ mit der Vorschrift

$$(g \circ f)(u) = g(f(u))$$

heißt *Komposition* oder *Verkettung* von f und g

Verkettung linearer Abbildungen

Satz 17

Seien $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *und* $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ *lineare Abbildungen. Die Verkettung* $G \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *ist eine lineare Abbildung.*

Beweis: Siehe letzte Vorlesung.

Die Standardmatrix von $G \circ T$

- $B = (b_1 \cdots b_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Standardmatrix von $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
- $A \in \mathbb{R}^{p \times m}$ Standardmatrix von $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$
- Standardmatrix von $G \circ T$ ist

$$\boxed{(Ab_1 \cdots Ab_n) \in \mathbb{R}^{p \times n}}$$

Standardmatrix: Die Spalten sind die Bilder der Einheitsvektoren.

erste Spalte $(G \circ T)(e_1) = G(T(e_1)) = G(B \cdot e_1)$

$= G(b_1) = A \cdot b_1$

i-te Spalte $(G \circ T)(e_i) = G(T(e_i)) = G(B \cdot e_i) = G(b_i)$

$= A \cdot b_i$.

Motivation: Immer wieder Lösungen finden von

$$(*) \quad A \cdot x = b,$$ wobei bei jeder Anfrage, das gleiche $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ benutzt wird.

Berechne Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$B \cdot A = I_n$$

Multipliziere $(*)$ von links mit B:

$$\underbrace{B \cdot A}_{I_n} \cdot x = B \cdot b$$

$$x = B \cdot b.$$

Lösung von $(*)$

Dieses B ist die Inverse von A.

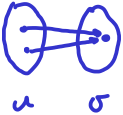
Wir schreiben $B = A^{-1}$.

B ist die Standardmatrix der Umkehrabbildung T^{-1} von $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $T(x) = A \cdot x$

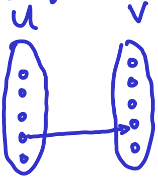
Umkehrfunktion

- U, V zwei Mengen und $f : U \to V$ eine Funktion.
- Wir suchen eine Funktion, die das Anwenden von f rückgängig macht.
- Woran kann dieses Rückgängigmachen scheitern?

$f^{-1}: V \to U$ mit $f^{-1}(f(u)) = u$.



f muss surjektiv sein.



Für lineare Abbildungen bedeutet das: $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist umkehrbar

$\Leftrightarrow$ $n = m$ und die Spalten der Standardmatrix sind Basen des $\mathbb{R}^n$.

Umkehrfunktion

Definition

Ist $f : X \to Y$ bijektiv, so heißt

$$f^{-1} : \begin{array}{rcl} Y & \longrightarrow & X \\ f(x) & \longmapsto & x \end{array}$$

die *Umkehrfunktion* von f.

Andere Schreibweise für

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

oder $\quad f^{-1}(y) = x \quad$ mit $y = f(x)$

Umkehrabbildungen linearer Abbildungen

Lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bijektiv $\iff m = n$ und Spalten der Standardmatrix Basis des $\mathbb{R}^n$

Satz 18

Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine bijektive lineare Abbildung, dann ist die Umkehrabbildung $T^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auch eine lineare Abbildung.

Beweis: Letzte Vorlesung: $T^{-1}(x) = A^{-1}x$ wobei $T(x) = Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Eine solche Abbildung $T^{-1}(x) = \underbrace{A^{-1} \cdot x}_{\text{Matrix} \times \text{Vektor}}$ ist linear $\blacksquare$

Die Standardmatrix von T^{-1}

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Standardmatrix der bijektiven linearen Abbildung T.
- Standardmatrix von T^{-1}: A^{-1} ← nennen wir so. $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
- $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n$
- $A^{-1} = (a_1^{-1} \cdots a_n^{-1})$
- Wie berechnet man a_1^{-1}? :

$$A\,(a_1^{-1} \cdots a_n^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \vdots & & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt $A \cdot a_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \cdot a_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$T(x) = Ax.$

$T^{-1}(T(x)) = A^{-1} \cdot A \cdot x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$ Gilt $\iff A^{-1} \cdot A = I_n$

Zum Berechnen von $A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$: $\left[\begin{array}{c|c} A & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{array}\right] \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} \ddots & \\ 0 & \end{array}\right) \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & a^{-1} \\ 0 & & 1 & \end{array}\right]$

Die Standardmatrix von T^{-1}

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Standardmatrix der bijektiven linearen Abbildung T.
- Standardmatrix von T^{-1}: A^{-1}
- $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = I_n$
- $A^{-1} = (a_1^{-1} \cdots a_n^{-1})$
- Wie berechnet man a_1^{-1}?

Zum Berechnen von $A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$: $\left[A \,\middle|\, \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right] \rightsquigarrow \left(\begin{matrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{matrix} \,\middle|\, * \right) \rightsquigarrow \left[\begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \,\middle|\, a^{-1}\right]$

Man erhält A^{-1} mit folgendem Algorithmus.

$$\left[A \,\middle|\, \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}\right] \xrightarrow[\text{Führe diese elem. Op. auf } I_n \text{ aus}]{\text{überführe A in red. Z.S.F.}} \left[I_n \,\middle|\, A^{-1}\right].$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad :$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot 2 \; -$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right] \div (-2)$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1/2 \end{array}\right] \cdot 3 \; - \qquad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1 & -1/2 \end{array}\right]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

$$[A \mid I_n] \rightsquigarrow [\mathrm{ZSF}(A) \mid \tilde{A}]$$

ZSF(A) hat Nullzeile $\Leftrightarrow$ A ist nicht invertierbar!

Algorithmus zum Berechnen der Inversen

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- Berechne die reduzierte Zeilenstufenform von

$$(A \ I_n)$$

- Ist das Ergebnis von der Form

$$(I_n \ B)\,,$$

dann ist $A^{-1} = B$. Andernfalls ist A nicht invertierbar.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] {*4} \; = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot 3 \\ + \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right] \div 2 \qquad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9/2 & 7 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right]$$

Charakterisierung invertierbarer Matrizen

Satz 19

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent.

a) *A ist invertierbar.*

b) *Die reduzierte Zeilenstufenform von A ist I_n.*

c) *A hat n Pivotpositionen.*

d) *$Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$.*

e) *Die Spalten von A sind linear unabhängig.*

f) *Die lineare Abbildung $T(x) = Ax$ ist injektiv.*

g) *Die Gleichung $Ax = b$ ist für alle $b \in \mathbb{R}^n$ lösbar.*

h) *Die Spalten von A erzeugen $\mathbb{R}^n$.*

i) *Die lineare Abbildung $T(x) = Ax$ ist surjektiv.*

j) *Es existiert eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $C \cdot A = I_n$.*

k) *Es existiert eine Matrix $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $A \cdot D = I_n$.*

l) *A^T ist invertierbar.*

$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$(A^{-1})^T \cdot A^T =$

$(A \cdot A^{-1})^T = I_n^T$

$= I_n$

$C = D$

Beispiel

Benutze Satz 19, um zu entscheiden, ob diese Matrix invertierbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Andere Methode:

Berechne ZSF von A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

nur Pivot-Spalten.

d.h. Invertierbar!

Satz 20

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist genau dann invertierbar, wenn $ad - cb \neq 0$.
In diesem Fall ist

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

<u>Beweis:</u> „$\Leftarrow$" Sei $a \cdot d - c \cdot b \neq 0$.

$$\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Satz 20

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist genau dann invertierbar, wenn $ad - cb \neq 0$.
In diesem Fall ist

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Sei $a \cdot d - c \cdot b = 0$

„⇒" Wenn $a = c = 0$, dann sind Spalten von A lin. abh. und somit A nicht invertierbar.

Sei also $a \neq 0$ oder $c \neq 0$.

1. Fall $a \neq 0$ multipliziere erste Spalte mit $\frac{b}{a}$. $\begin{pmatrix} b \\ \frac{c \cdot b}{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

⇒ Spalten nicht lin. unabh.

Satz 20

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist genau dann invertierbar, wenn $ad - cb \neq 0$.
In diesem Fall ist

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

wenn $c \neq 0$, dann multipliziere erste Spalte mit $\frac{d}{c}$

$$\begin{pmatrix} \frac{a \cdot d}{c} \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow A \text{ nicht invertierbar.} \qquad \blacksquare$$

Umkehrabbildung

Satz 21

Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung mit Standardmatrix A. T ist umkehrbar genau dann wenn A invertierbar ist. In diesem Fall ist $T^{-1}(x) = A^{-1}x$.

Beweis: offensichtlich!

Noch einmal das GLS $Ax = b$

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar.
- Betrachte
$$Ax = b. \tag{7}$$
- Das GLS (7) hat Lösung $x^* = A^{-1}b$

Elementare Matrizen

Erinnerung: Elementare Zeilenoperationen

i) Vertauschen zweier Zeilen

ii) Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\neq 0$

iii) Addition eines Vielfachen einer Zeile auf eine *andere* Zeile.

$$U \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vertauschen von Zeile i und k

$$
U \cdot A = \begin{array}{c@{}l}
\left[\begin{array}{c}
\text{''} \\
k\text{-te Zeile von } A \\
\text{''} \\
i\text{-te Zeile} \\
\text{''}
\end{array}\right]
&
\begin{array}{l}
\\
\leftarrow i \\
\\
\leftarrow k \\
\\
\end{array}
\end{array}
$$

$$
U = \begin{array}{c@{}l}
\left[\begin{array}{ccc}
1 \cdots 1 & & \\
- & e_k & - \\
& 1 \cdots 1 & \\
- & e_i & - \\
& & 1 \cdots 1
\end{array}\right]
&
\begin{array}{l}
\\
\leftarrow i \\
\\
\leftarrow k \\
\\
\end{array}
\end{array}
$$

Multiplikation der i-ten Zeile mit $\alpha \neq 0$

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \leftarrow i \\ \uparrow & \\ i & \end{array} \cdot A$$

Zeile i= Zeile i + $\alpha\cdot$ Zeile k, $i \neq k$

$$i \to \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ \hline & e_i + \alpha \cdot e_k & \\ \hline & & \ddots \\ & & & 1 \end{bmatrix} \cdot A$$

Nacheinanderausführen von elementaren Zeilenoperationen

- Auf $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ werden Operationen $O_1, \dots, O_k$ ausgeführt (in dieser Reihenfolge)
- Das Ergebnis ist $Erg \in \mathbb{R}^{m \times n}$
- Seien $E_{O_1}, \dots, E_{O_k} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ die elementaren Matrizen, die zu $O_1, \dots, O_k$ gehören.

Dann ist

$$\underbrace{E_{O_k} \cdots E_{O_1}}_{\in \mathbb{R}^{m \times m}} \cdot A = Erg$$