Heute (07.10.2014):

- Textbuch Kapitel 2.1, 2.2
- Matrixoperationen: Addition und Multiplikation
- Die Transponierte
- Die Inverse einer Matrix

Terminologie

$\in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\qquad$ $\in \mathbb{R}^m$

- $A = (a_1 a_2 \cdots a_n)$ $a_1, \ldots, a_n$ Spalten von A
- *Diagonaleinträge* von A: $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$
- A ist *Diagonalmatrix*, wenn $\underline{m = n}$ und $a_{ij} = 0$ wenn $i \neq j$. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Diagonalmatrix mit Diagonalelementen $a_{ii} = 1$ ist *Einheitsmatrix* I_n.

Betrachte lineare Abbildung
$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$T(x) = I_n \cdot x$

$\Updownarrow$

Identität, $T(x) = x$

$I_n = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$

$I_n \cdot x = x$

Summe zweier linearer Abbildungen

$T, G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineare Abbildungen, dann ist $T + G$ mit

$$(T + G)(x) = T(x) + G(x)$$

eine lineare Abbildung.
Wenn $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Standardmatrix von T und $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Standardmatrix von G, dann ist

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

Standardmatrix von $T + G$.

Erinnerung: Spalten der Standardmatrix sind Bilder der Einheitsvektoren.

$(T+G)(e_i) = T(e_i) + G(e_i) = a_i + b_i$ mit $\left\{ \begin{matrix} a_i \\ b_i \end{matrix} \right\}$ i-te Spalte Stand.mat von $\left\{ \begin{matrix} T \\ G \end{matrix} \right\}$

Beispiele

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften der Matrixaddition

Def: $\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \cdots & \alpha \cdot a_{1n} \\ & \vdots & & \\ \alpha \cdot a_{m1} & \cdots & & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$

Satz 13

Seien $A, B, C \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Es gelten

a) $A + B = B + A$

b) $(A+B)+C = A+(B+C)$

c) $A + 0 = A$

Nullmatrix.

d) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

e) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

f) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$

$0 \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist Standardmatrix zur lin. Abb.

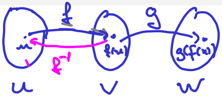
$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$T(x) = 0 \cdot x = 0$

Matrix

Vektor

Komposition von Funktionen/Abbildungen



- U, V, W Mengen
- $f : U \to V$
- $g : V \to W$ zuerst f, dann g
- Die Funktion $g \circ f : U \to W$ mit der Vorschrift

$$(g \circ f)(u) = g(f(u))$$

heißt *Komposition* oder *Verkettung* von f und g

Def: Seien A, B Mengen und $f : A \to B$ eine Funktion. Eine Funktion $f^{-1} : B \to A$ heißt Umkehrfunktion von f, wenn $\forall a \in A : (f^{-1} \circ f)(a) = a$ und $\forall b \in B \; (f \circ f^{-1})(b) = b$.

Bemerkung: f^{-1} existiert genau dann, wenn f bijektiv. In dem Fall ist $f^{-1}(f(a)) = a$ eindeutig.

Verkettung linearer Abbildungen

Satz 14

Seien $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ lineare Abbildungen. Die Verkettung $G \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ist eine lineare Abbildung.

Beweis: Zu zeigen sind die Eigenschaften

i) $(G\circ T)(u+v) = (G\circ T)(u) + (G\circ T)(v)$ für alle $u,v \in \mathbb{R}^n$

ii) $(G\circ T)(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot (G\circ T)u$ für alle $u \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

zu i) Seien $u,v \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}(G\circ T)(u+v) &= G(T(u+v)) \\ &\overset{\text{da } T \text{ linear}}{=} G(T(u)+T(v)) \\ &\overset{\text{da } G \text{ linear}}{=} G(T(u)) + G(T(v)) \\ &= (G\circ T)(u) + (G\circ T)(v)\end{aligned}$$

zu ii) Sei $u \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}(G\circ T)(\lambda \cdot u) &= G(T(\lambda \cdot u)) \\ &= G(\lambda T(u)) \\ &= \lambda \cdot G(T(u)) = \lambda \cdot [(G\circ T)(u)]\end{aligned}$$

∎

Die Standardmatrix von $G \circ T$

Beispiel:

$G \circ T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$T(x) = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}}^{B} x$

Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$

die Standard matrix von $G \circ T$

$G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} x$

Die Spalten von A sind

$$\left[(G \circ T)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (G \circ T)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, (G \circ T)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left[A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \; A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; A\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$=$$

Die Standardmatrix von $G \circ T$

- $B = (b_1 \cdots b_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ Standardmatrix von $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
- $A \in \mathbb{R}^{p \times m}$ Standardmatrix von $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$
- Standardmatrix von $G \circ T$ ist

$$(Ab_1 \cdots Ab_n) \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

Beispiele

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\in \mathbb{R}^{2\times 2}} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B$

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{p\times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, dann ist $A \cdot B$ die Matrix

$$(Ab_1 \cdots Ab_n) \in \mathbb{R}^{p\times n}.$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} \\ a_{i1}\ a_{i2} \cdots\ a_{im} \\ \\ \end{pmatrix}} \quad \underset{B}{\begin{pmatrix} & b_{1j} & \\ & b_{2j} & \\ & \vdots & \\ & b_{mj} & \end{pmatrix}} = \begin{array}{c|c} & \\ i \longrightarrow & \begin{pmatrix} & & \\ & (A\cdot B)_{ij} & \\ & & \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{c} \downarrow \\ j \end{array} \end{array}$$

$$a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \dots + a_{im}\cdot b_{mj}$$

Zeilen-Spalten Regel

- $A \in \mathbb{R}^{p\times m}$
- $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$
- $(A \cdot B)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{im}b_{?}$

Beispiele:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & -0 & -1 \\ 5 & 7 & 9 & 100 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)_{32} = 2\cdot 3 - 1\cdot 0 - 0\cdot 3 + 1\cdot 1$$

$$= 7$$

Eigenschaften des Produkts von Matrizen

T, G, H die dazugeh. lin. Abbildgn.

Satz 15

Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und B und C Matrizen für die die angegeben Produkte und Summen definiert sind. Dann gelten

a) $A(BC) = (AB)C$ — gilt: $T\circ(G\circ H) = (T\circ G)\circ H$

b) $A(B+C) = AB + AC$ — b.) auf Ebene der linearen Abbildungen

c) $(B+C)A = BA + CA$ — $T\circ(B+C) = T\circ B + T\circ C$

d) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$ — <u>Begründung:</u> Sei $x \in \mathbb{R}^p$, p Anzahl Spalten B bzw. C.

e) $I_m A = A I_n$

$$(T\circ(B+C))(x) = T((B+C)(x))$$
$$= T(B(x) + C(x))$$
$$= T(B(x)) + T(C(x)) = (T\circ B + T\circ C)(x)$$

Gilt $AB = BA$?

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}$$

Warnung:

1. In der Regel gilt nicht $AB = BA$
2. Aus $AB = AC$ folgt in der Regel nicht $B = C$ auch wenn $A \neq 0$
3. Wenn $AB = 0$, dann folgt in der Regel nicht ($A = 0$ oder $B = 0$)

2.) $$\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \overset{B}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{C}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}}$$

3.) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A \cdot B = 0.$$

Die Transponierte

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Die Transponierte von A ist die Matrix $A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$, deren Spalten, die jeweiligen Zeilen von A sind.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften der Transponierten

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\alpha A)^T = \alpha(A^T)$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Die Inverse einer Matrix

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Die Matrix A ist *invertierbar*, wenn es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt mit $AB = BA = I_n$. Die Matrix B wird dann mit A^{-1} bezeichnet.

A^{-1} ist Inverse von A.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Satz 16

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist genau dann invertierbar wenn die Spalten von A eine Basis des $\mathbb{R}^n$ sind.

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Beweis. "$\Rightarrow$" Seien die Spalten von A also keine Basis des $\mathbb{R}^n$.

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(x) = A \cdot x$ ist keine Bijektion. Also hat T keine Umkehrfunktion $\Rightarrow$ A ist nicht invertierbar.

Übung: $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Wenn $A \cdot B = I_n$ so gilt auch $B \cdot A = I_n$.

"$\Leftarrow$" Da Spalten von A Basis des $\mathbb{R}^n$ sind gilt es für jeden Einheitsvektor $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ (i-te Stelle) ein $x_i \in \mathbb{R}^n$ mit $A \cdot x_i = e_i$.

$A^{-1} := (x_1\ x_2 \cdots x_n)$ ist Inverse von A. Es gilt $A \cdot A^{-1} = I_n$ und $A^{-1} \cdot A = I_n$ ∎