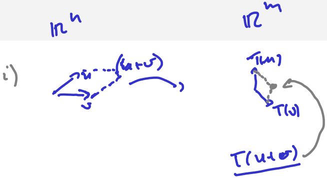
Heute (02.10.2014):

- Textbuch Kapitel 1.8, 1.9
- Lineare Abbildungen
- Die Matrix einer linearen Abbildung
- Basen

Lineare Abbildung



Definition

Eine Funktion $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ist *linear*, wenn

i) $T(u+v) = T(u) + T(v)$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$.

ii) $T(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot T(u)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathbb{R}^n$.

Überlegung:

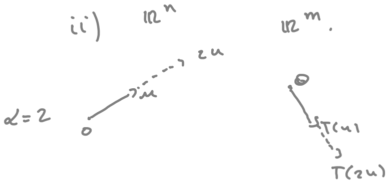
Was ist $T(0)$?

$$T(0) = T(0+0) \overset{i)}{=} T(0) + T(0) \quad \Big| -T(0)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = T(0)$$

Auch so argumentieren.

$$T(0) = T(0 \cdot 0) = 0\, T(0) = 0$$



Beispiel

$$T\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}^{\in \mathbb{R}^{2\times 3}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

Wir wissen
- $A(u+v) = Au + A\cdot v \quad \forall u,v \in \mathbb{R}^n$ i)
- $A(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot A \cdot u \quad \forall u \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in \mathbb{R}.$ ii)

$\Rightarrow$ Eine Abbildung $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
$T(x) = A\cdot x$ ist linear.

Verträglichkeit mit Multiplikation und Addition

Beobachtung

Wenn $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung ist, dann gilt mit Vektoren $v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$ und Skalaren $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$

$$T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_p T(v_p).$$

$$T(\underbrace{\alpha_1 v_1}_{u} + \underbrace{(\alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n)}_{v}) \overset{i)}{=} T(\alpha_1 \cdot v_1) + T(\alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n)$$

mehrmaliges Anwenden von i) (n-1 x)

$$= T(\alpha_1 v_1) + \cdots + T(\alpha_n v_n)$$

$$\overset{ii)}{=} \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n)$$

$T(x) = A\,x$

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dann ist $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit $T(x) = Ax$ eine lineare Abbildung.

Eben schon gesehen!

Ist jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ von der Form Ax?

Antwort: "Ja". Um dies zu zeigen betrachten wir eine beliebige (aber feste) lineare Abbildung $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Wir konstruieren dann eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\forall x \in \mathbb{R}^n : T(x) = A \cdot x$.

Sei nun $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Wir schreiben $x = x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Also gilt: $T(x) = x_1 \cdot \underbrace{T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^m} + x_2 \cdot \underbrace{T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^m} + \cdots + x_n \cdot \underbrace{T\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^m}$

sind unabhängig von der Wahl von x.

Also gilt $T(x) = A \cdot x$ wobei $A = \left(T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Ist jede lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ von der Form Ax?

Der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← i-te Komponente heisst i-ter Einheitsvektor. Wir bezeichnen diesen auch mit e_i.

<u>Wir halten fest:</u> Eine lineare Abbildung $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist von der Form $T(x) = A \cdot x$, wobei die Spalten von A, die Bilder der Einheitsvektoren sind.

$$A = \big(T(e_1)\, T(e_2) \cdots T(e_n)\big) \in \mathbb{R}^{m \times n}.$$

Die Matrix einer linearen Abbildung

Satz 9

Sei $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Es gibt genau eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $T(x) = Ax$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Diese Matrix ist

$$A = (T(e_1) \cdots T(e_n))$$

Definition

Die Matrix A von oben heißt *Standardmatrix* der linearen Abbildung T.

Basis

Definition

Eine Menge von Vektoren $\{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Basis (des $\mathbb{R}^n$)*, wenn die folgenden Eigenschaften gelten:

1. $\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_p\} = \mathbb{R}^n$, d.h, für jeden Vektor $u \in \mathbb{R}^n$ gibt es Gewichte $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ mit

$$u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p.$$

2. $\{v_1, \ldots, v_p\}$ ist linear unabhängig.

Beispiele

$V = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ Basis des $\mathbb{R}^3$?

<u>Betrachte Matrix:</u> $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A \in \mathbb{R}^{3\times 3}}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot (-5) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -14 \end{pmatrix}$

V ist Basis

$\Leftrightarrow$ 1.) $\forall b \in \mathbb{R}^3$: $A \cdot x = b$ hat Lösung

d.h. A hat in jeder Zeile Pivotposition.

2.) $\ker(A) = \{0\}$

d.h. A hat in jeder Spalte Pivotposition

A hat in jeder Zeile und Spalte Pivotposition.

Ein Satz zu Basen

Satz 10

$\{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *ist genau dann eine Basis, wenn*

a) ▸ $\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_p\} = \mathbb{R}^n$ *und*

b) ▸ $p = n$

Beweis: „$\Rightarrow$" a) ist klar! Sei $A = (v_1 \ldots v_p)$. A hat in jeder Zeile

und in jeder Spalte eine Pivotposition $\Rightarrow$ $p = n$.

„$\Leftarrow$" Wir wissen $A = (v_1 \ldots v_p)$ hat in jeder Zeile eine Pivotposition.

Wenn $p = n$ ist, dann ist auch in jeder Spalte eine Pivotposition

Also ist $\{v_1 \ldots v_p\}$ eine Basis.

Satz 11

Sei $\{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *eine Menge von Vektoren dessen Erzeugnis* $\mathbb{R}^n$ *ist. Eine lineare Abbildung* $T(x)$ *ist durch die Bilder*

$$T(v_i),\ 1 \leqslant i \leqslant p$$

eindeutig festgelegt.

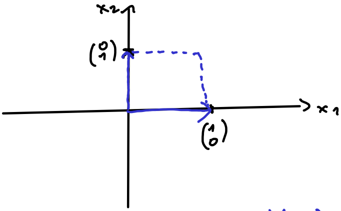
Beweis: Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Also existieren Gewichte $\beta_1 \ldots \beta_p$ mit

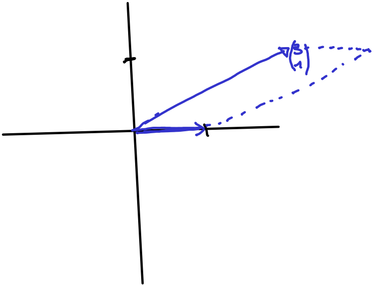
$$v = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_p \cdot v_p.$$

Es gilt $T(v) = \beta_1 \cdot \underline{T(v_1)} + \cdots + \beta_p \cdot \underline{T(v_p)}$ ∎

Scherung

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

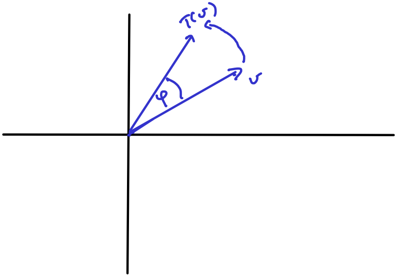




$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

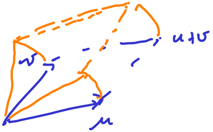
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eine Drehung um den Winkel ϕ im $\mathbb{R}^2$ ist eine lineare Abbildung.



Es ist klar, dass $\forall\, u, v \in \mathbb{R}^2$

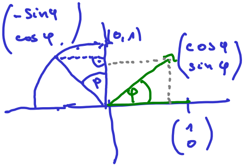
$T(u+v) = T(u) + T(v)$ gilt.



Wie sieht die Standardmatrix.

$$\begin{pmatrix} T(e_1) & T(e_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$



Matrixform der Drehung

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

Stauchung/Streckung

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $T(x) = \alpha \cdot x$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$T(x) = A \cdot x \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \cdots & 0 \\ & \alpha & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

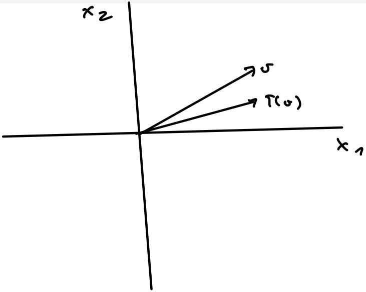
Horizontale/Vertikale Stauchung/Streckung

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$T(x) = A \cdot x$ mit

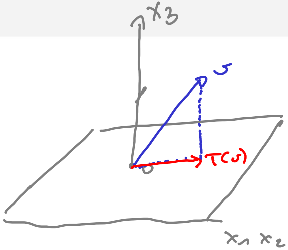
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

|| oder Faktor α.



Projektion

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$



$T(x) = A \cdot x$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

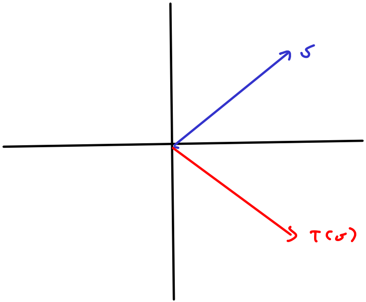
Horizontale Scherung

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + \alpha x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$T(x) = A \cdot x$

mit $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Spiegelung an der x_1-Achse



$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$T(x) = A \cdot x$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

Satz 12

Sei $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung mit Standardmatrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

i) *T is surjektiv genau dann wenn die Spalten von A $\mathbb{R}^m$ erzeugen.*

ii) *T ist injektiv genau dann wenn die Spalten von A linear unabhängig sind.*

iii) *T ist bijektiv, genau dann, wenn die Spalten von A eine Basis des $\mathbb{R}^n$ sind.*

Beweis: i) ist klar! (Definition)

ii) „$\Rightarrow$" Annahme Spalten von $A = (a_1 \dots a_n)$ sind linear abh.

0 ist nichttriviale LK der Spalten von A mit gewichten $d_1, \dots, d_n$ nicht alle 0.

0 und $\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \neq 0$ werden auf 0 abgebildet ↯ zur Injektivität.

„$\Leftarrow$" Annahme T ist nicht injektiv. Denn existieren $u \neq v \in \mathbb{R}^n$ mit

$A u = A \cdot v \Rightarrow A(u - v) = 0 \Rightarrow$ nichttriviale LK der 0 widerspruchsfrei.

iii) klar!

Beispiel

$$T(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 5x_1 + 7x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$$ ist eine injektive lineare Abbildung, denn

<u>Standardmatrix:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

in jeder Spalte Pivotposition $\Rightarrow$ ~~[illegible]~~ ~~Basis~~ Spalten von A lin. unabh. $\Rightarrow$ T injektiv.