Heute (30.09.2014):

- Textbuch Kapitel 1.8, 1.9
- Lineare Unabhängigkeit
- Funktionen (Abbildungen)
- Abzählbarkeit
- Lineare Abbildungen
- Die Matrix einer linearen Abbildung

Lineare Unabhängigkeit

Definition

Die Menge von Vektoren $\{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist *linear unabhängig*, wenn 0 nur triviale Linearkombination der $v_1, \ldots, v_p$ ist. $0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_p = 0$

$$\underbrace{\text{Mit anderen Worten, wenn } \ker(v_1 \ldots v_p) = \{0\}.}_{\text{Mit anderen Worten:}}$$

$(v_1 \cdots v_p) x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

Charakterisierung linearer Abhängigkeit

Satz 6

Eine Menge $S = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \geqslant 2$ von 2 oder mehr Vektoren ist linear abhängig dann und nur dann, wenn mindestens ein Vektor aus S eine Linearkombination der übrigen Vektoren aus S ist.

Achtung: Wir sagen nicht "jeder Vektor aus S"!

Beweis: „$\Rightarrow$" $v_1, \dots, v_p$ ist also linear abhängig. Zu zeigen ist:

$\exists\, v_i \in \{v_1, \dots, v_p\}$ und Gewichte α_j, $j = 1, \dots, p$, $j \neq i$ mit

$$v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p} \alpha_j \cdot v_j$$

$v_1, \dots, v_p$ linear abhängig $\Rightarrow$ 0 ist nichttriviale LK der $v_1, \dots, v_p$.

d.h. $\exists\, \beta_j$, $1 \leq j \leq p$ mit $\sum_{j=1}^{p} \beta_j \cdot v_j = 0$ und nicht alle β_j sind 0.

d.h. $\exists\, \beta_j,\ 1 \leq j \leq p$ mit $\sum_{j=1}^{p} \beta_j \cdot v_j = 0$ und nicht alle β_j sind 0.

Sei $i \in \{1,\dots,p\}$ mit $\beta_i \neq 0$.

wir setzen $v_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} -\frac{\beta_j}{\beta_i} v_j$

d.h. $\beta_i \cdot v_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} -\beta_j \cdot v_j \quad \Big| \div \beta_i$

$$v_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} \alpha_j \cdot v_j$$

Setze $\alpha_j = -\frac{\beta_j}{\beta_i} \qquad j \in \{1,\dots,p\} \setminus \{i\}$

d.h. v_i ist Linearkombination der $\{v_1,\dots,v_p\} \setminus \{v_i\}$. mit Gewichten α_j

"$\Leftarrow$" Sei nun $i \in \{1,\dots,p\}$ mit $v_i = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \alpha_j \cdot v_j$ mit geeigneten $\alpha_j \in \mathbb{R}$

dann gilt $1 \cdot v_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} -\alpha_j v_j = 0$ $\Rightarrow$ 0 nichttriviale LK der $\{v_1,\dots,v_p\}$

$\Rightarrow$ $\{v_1,\dots,v_p\}$ sind linear abhängig. $\blacksquare$

$A \subsetneq B \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} A \subseteq B$ und $A \neq B$

Satz ~~8~~ 7

Eine Menge $S = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *von* $p \geqslant n+1$ *Vektoren aus* $\mathbb{R}^n$ *ist linear abhängig.*

Beweis:

Sei $A = (v_1 \dots v_p) \in \mathbb{R}^{n \times p}$. $\quad \operatorname{Kern}(A) \supsetneq \{0\}$

Denn # Pivotpositionen $\leq \min\{n, p\} = n$ da $p > n$ gibt es also freie Variablen des GLS $A \cdot x = 0$. $\Rightarrow \operatorname{Kern}(A) \supsetneq \{0\}$ ∎

Quiz

Sei $S = \{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ und $0 \in S$. Kann S linear unabhängig sein?

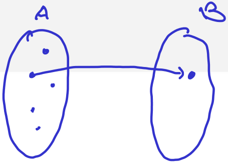
Nein, denn es existiert nicht triviale LK der 0 aus den $v_1, \ldots, v_p$.

z. B. Sei $i \in \{1, \ldots, p\}$ mit $v_i = 0$.

Setze $\alpha_i = 100$, $\alpha_j = 0$ für $j \in \{1, \ldots, p\} \setminus \{i\}$.

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{p} \alpha_j v_j = 0$ nicht triviale LK der $v_1, \ldots, v_p$ die 0 ergibt.

Abbildungen



Definition

Seien A und B Mengen.
Eine *Abbildung* oder *Funktion* f von A nach B (wir schreiben $f\colon A \longrightarrow B$)
ist eine Vorschrift, die jedem $x \in A$ ein Element $f(x) \in B$ zuweist.
und nur ein

- A ist die *Definitionsmenge*
- B ist die *Zielmenge*
- $f(x)$ is das *Bild* von x
- $\{f(x) : x \in A\}$ heißt *Bildmenge* von f

Beispiele

$A = \{a, 1, 3\}$. $\quad B = \{2, h\}$.

$f: A \to B$

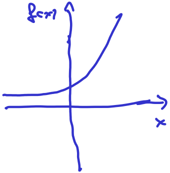
$f(a) = 2$

$f(1) = 2$

$f(3) = h$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$f(x) = e^x$



Gibt es $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ mit Bildmenge$(f) = \mathbb{Z}$?

$0 \mapsto 0$

$1 \mapsto 1$

$2 \mapsto -1$

$3 \mapsto 2$

$4 \mapsto -2$

ja:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2}, & \text{falls } x \text{ grade} \\ \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil, & \text{falls } x \text{ ungrade.} \end{cases}$$

aufgerundet

Bildmenge$(f) = \mathbb{Z}$

Warum? Wir müssen zeigen: $\forall z \in \mathbb{Z}$

für alle

$\exists n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = z$.

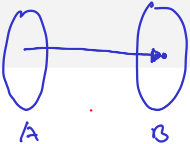
existiert ein

1. Fall: $z \leq 0$

$n = 2|z|$, Es gilt $f(n) = z$

2. Fall $z > 0$ $\quad n = 2z - 1$

Surjektiv

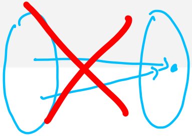


Definition

Eine Abbildung $f : A \to B$ ist *surjektiv*, wenn jedes $b \in B$ das Bild mindestens eines $a \in A$ ist. $\forall b \in B \; \exists a \in A$ mit $f(a) = b$.

Mit anderen Worten Bildmenge$(A) = B$

Injektiv



Definition

Eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ ist *injektiv*, wenn jedes $b \in B$ das Bild höchstens eines $a \in A$ ist.

Bijektiv

Eine Abbildung $f : A \to B$ ist *bijektiv*, falls sie injektiv und surjektiv ist.

gibt es $f: A \to B$, mit $A = \{2, 3\}$, $B = \{a, d, k\}$

bijektiv?

Nein!

$\exists$ eine bijektive Abbildung zwischen zwei endlichen Mengen

A und B $\Longleftrightarrow$ A und B haben die gleiche Anzahl Elemente

Gleichmächtigkeit, Abzählbarkeit

Definition

Zwei Mengen A und B sind *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Funktion $f\colon A \longrightarrow B$ gibt.

Wenn es eine injektive Abbildung $f\colon A \longrightarrow B$ gibt, so ist A *höchstens gleichmächtig* zu B.

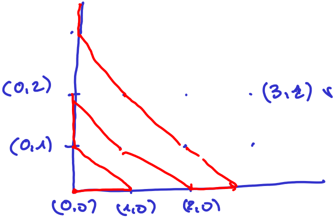
Eine Menge, die zu den natürlichen Zahlen gleichmächtig ist heißt *abzählbar*.

Bsp.: $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, denn $f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \lceil \frac{n}{2} \rceil & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

ist eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.

Beispiel: $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Zunächst zeigen wir: $\mathbb{Q}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{Q},\ x \geq 0\}$ ist abzählbar.



(3,1) repräsentiert Bruch $3/1$.

Wir gehen durch ~~die~~ die Gitterpunkte im positiven Orthanten alle ab.

Trifft man einen Gitterpunkt (x,y) mit

1.) $y \neq 0$

2.) $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ noch nicht gesehen.

wird $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ die nächste ganze Zahl angeordnet.

Diese Vorschrift beschreibt eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$.

Übung: Es existiert eine Bijektion $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$

Benutze die Existenz einer Bijektion $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}_{\geq 0}$

Die reellen Zahlen sind nicht abzählbar

Satz ~~10~~ 8
Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind überabzählbar.

Beweis: Wir zeigen $M = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ ist überabzählbar.

rechts offenes Intervall

Annahme: Es existiert eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to M$

Wir führen diese Annahme zu einem Widerspruch. Jede Zahl $x \in [0,1)$ kann eindeutig in der Form $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot 10^{-i}$ mit $a_i \in \{0,1,2,\dots,9\}$ geschrieben werden.

Beweismethode: Diagonalisierung

0	0, 9 8 7 6 .....
1	0, 0 7 5 9 3
2	0, 3 1 2 8
3	0, 3 5 9 2 1
4	
⋮	

Konstruiere nun $x = 0{,}b_1 b_2 \dots \in [0,1)$ mit $b_i \neq$ i+1-ste Nachkommastelle von $f(i)$

Sei nun $i \in \mathbb{N}$ mit $f(i) = x$.

x hat in i+1-ter Nachkommastelle eine Ziffer, die sich von i+1-ter Nachkommastelle von $f(i)$ unterscheidet. ↯ Widerspruch $\Rightarrow$ Es existiert keine Bijektion $f : \mathbb{N} \to [0,1)$ ∎