Heute (25.09.2014):

- Textbuch: Kapitel 1.5, 1.7, 1.8
- Matrix-Vektot Produkt $A\,x$
- Beschreibung von Lösungsmengen linearer GLS
- Kern einer Matrix
- Lineare Unabhängigkeit
- Lineare Abbildungen

$A\,x$

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

Definition

$\in \mathbb{R}^m$

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Spalten $a_1, \ldots, a_n$ und sei $x \in \mathbb{R}^n$. Das *Produkt* von A und x, welches mit $A\,x$ bezeichnet wird ist der Vektor

$$A\,x = (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$$

$A\,x$ ist die Linearkombination der Spalten von A mit den Gewichten $x_1, \ldots, x_n$.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 32 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$. Schreibe die Linearkombination von v_1, v_2, v_3 mit Gewichten $3, -4, 5$ als Matrix/Vektor Produkt $A\,x$.

$A = (v_1, v_2, v_3) \qquad x = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad$ <u>LK:</u> $\quad A \cdot x.$

Beispiel:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

Lineare GLS, Matrixgleichung, Vektorgleichung

Notiz

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Spalten $a_1, \dots, a_n$, sei $b \in \mathbb{R}^m$ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ein Vektor von Variablen. Die jeweiligen Lösungsmengen der Matrixgleichung

$$A\,x = b \tag{6}$$

der Vektorgleichung

$$x_1\,a_1 + \cdots + x_n\,a_n = b \tag{7}$$

und des linearen GLS mit erweiterter Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & b \end{pmatrix} \tag{8}$$

sind identisch.

Beispiel

Schreibe das lineare GLS als Matrixgleichung und als Vektorgleichung

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2 \cdot x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2 \cdot x_2 & - & 8 \cdot x_3 & = & 8 \\ -4 \cdot x_1 & + & 5 \cdot x_2 & + & 9 \cdot x_3 & = & -9 \end{array}$$

1.) Matrixgleichung $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

2.) $x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 + x_3 \cdot a_3 = b$ mit $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

Satz 3

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Die folgenden Eigenschaften sind logisch äquivalent:

a) *Für alle $b \in \mathbb{R}^m$ ist $Ax = b$ lösbar.*

b) *Jedes $b \in \mathbb{R}^m$ ist eine Linearkombination der Spalten von A.*

c) *Die Spalten von A erzeugen $\mathbb{R}^m$.*

d) *A hat in jeder Zeile eine Pivotposition.*

Wir zeigen Satz durch den Ringschluss $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow a)$

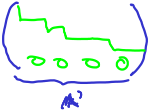
__Beweis:__ $a) \Rightarrow b)$ Aus a) folgt: Für alle $b \in \mathbb{R}^m$ ist die Vektorgleichung $x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = b$ lösbar.

Also ist jedes $b \in \mathbb{R}^m$ LK der Spalten von A.

$b) \Rightarrow c)$ Offensichtlich, da $\underbrace{\text{span}\{a_1, \dots, a_n\}}_{= \text{Erzeugnis von } a_1, \dots, a_n}$ = Menge der LK von $a_1, \dots, a_n$ ist.

<u>c) => d)</u> Wir nehmen an, dass A nicht in jeder Zeile eine Pivotposition hat. (Wir zeigen also aus nicht d) folgt nicht c))

$$\begin{pmatrix} & A & \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{Elementare}\\ \text{Zeil. Op.}}}$$



A' von A ~~Zeilen~~ Zeilenstufenform hat eine Nullzeile.

Nehme die Matrix $\left[A' \,\middle|\, \begin{matrix}0\\0\\0\\1\end{matrix}\right] \xrightarrow{\text{In umgekehrter Reihenfolge}} \left[A \,\middle|\, b'\right]$

wie oben wenden wir die Umkehrungen der Zeilenoperationen an

~~Das~~ Die Lösungsmenge des GLS $Ax=b'$ ist die $\underbrace{\text{Lösungsmenge des GLS } A'\cdot x = \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\\ 1\end{pmatrix}}_{= \emptyset}$

$\Rightarrow$ b' ist nicht im Span der Spalten von A

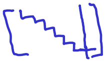
$\Rightarrow$ es gilt nicht c).

d) $\Rightarrow$ e)

Sei $b \in \mathbb{R}^m$ beliebig.

$(Ax=b)$ hat dieselbe Lösungsmenge wie das durch die Zeilenstufenform von $[A|b]$ repräsentierte GLS.

~~Dieses~~ Dieses ist von der Form



. Es gibt nur Basisvariablen.

d.h. $Ax=b$ ist lösbar.

$A \cdot u \in \mathbb{R}^m$

Satz 4

Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boxed{u, v \in \mathbb{R}^n}$ *und* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Es gelten*

i) $A(u+v) = Au + Av$

ii) $A(\alpha u) = \alpha(Au)$

<u>Beweis:</u> Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \\ a_{m1} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$A(u+v) = A \cdot \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_m + v_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(u_1+v_1) + a_{12}(u_2+v_2) + \cdots + a_{1n}(u_n+v_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(u_1+v_1) + a_{m2}(u_2+v_2) \cdots + a_{mn}(u_m+v_m) \end{pmatrix}$$

umsortieren

$$= \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{11}v_1 + a_{12}u_2 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}u_n + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}u_1 + a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mn}u_n + a_{mn}v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \cdots + a_{1n}u_n + a_{11}v_1 + \cdots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}u_1 + \cdots + a_{mn}u_n + a_{m1}v_1 + \cdots + a_{mn}v_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n + a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}u_1 + \dots + a_{mn}u_n + a_{m1}v_1 + \dots + a_{mn}v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + \dots + a_{1n}u_n \\ \\ a_{m1}u_1 + \dots + a_{mn}u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}v_1 + \dots + a_{mn}v_n \end{pmatrix}$$

$$= A \cdot u + A \cdot v \qquad \blacksquare$$

$A \cdot x = \boxed{0}$ homogenes lineares Gleichungssystem.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3 \cdot x_1 & + & 5 \cdot x_2 & - & 4 \cdot x_3 & = & 0 \\ -3 \cdot x_1 & - & 2 \cdot x_2 & + & 4 \cdot x_3 & = & 0 \\ 6 \cdot x_1 & + & x_2 & - & 8 \cdot x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} *1 \\ \leftarrow \\ \end{array} \quad *(-2) \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ *(-3) \\ + \end{array} \to \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Frei: x_3, $x_2 = 0$,

$3 \cdot x_1 + 0 \cdot 5 - 4 \cdot x_3 = 0$

$x_1 = \frac{4}{3} \cdot x_3.$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{3} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x_3 \cdot \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} : x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Beispiel:

$$10 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 0$$

Frei: x_2, x_3.

$$10 \cdot x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$$

$$x_1 = \frac{3}{10} x_2 + \frac{1}{5} x_3$$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{10} x_2 + \frac{1}{5} x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 : x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 3/10 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Homogene und inhomogene GLS

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Definition

Ein lineares GLS der Form

$$Ax = 0 \tag{9}$$

ist ein *homogenes lineares GLS*.

Der *Kern* einer Matrix A ist die Menge der Lösungen von (9) und wird mit $\ker(A)$ bezeichnet.

Bemerkung: $\text{Kern}(A) = \text{Span}\{v_1, \dots, v_\ell\}$ mit geeigneten $v_1, \dots, v_\ell \in \mathbb{R}^n$

Parametrisierte Vektorform: Beispiel inhomogenes GLS

Sei

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen GLS (evtl. nach elementaren Zeilenop.). Beschreibe die Menge aller Lösungen in parametrisierter Vektorform.

Frei: x_2, x_4.

$x_3 + 3x_4 = 1$

$\Leftrightarrow x_3 = 1 - 3 \cdot x_4$

und

$x_1 + 4x_4 = 2$

$x_1 = 2 - 4x_4$.

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 2-4x_4 \\ x_2 \\ 1-3x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} : x_2, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Lösungsmengen inhomogener linearer GLS

Satz 5

Sei $Ax = b$ ein lösbares lineares GLS und x^* eine Lösung. Die Menge aller Lösungen L *ist* von der Form

$$L = \{x^* + u : u \in \ker(A)\}$$

<u>Beweis:</u> Technik zum Beweis der Gleichheit zweier Mengen $A = B$.

1. zeige $A \subseteq B$. 2. zeige $B \subseteq A$.

„$\subseteq$“ Sei $y \in L$. <u>zz:</u> $y \in \{x^* + u : u \in \mathrm{Ker}(A)\}$.

y ist von der Form $x^* + u$ mit $u \in \mathrm{Ker}(A)$

$\Leftrightarrow$ $y - x^* = u \in \mathrm{Ker}(A)$.

$$A(y - x^*) = A \cdot y - Ax^* = b - b = 0$$

„$\supseteq$“ Sei $u \in \mathrm{Ker}(A)$ zz. $x^* + u \in L$.

$A(x^* + u) = Ax^* + A \cdot u = b + 0 = b \Rightarrow x^* + u \in L$. ∎

Berechnen der Lösungsmenge in parametrisierter Vektorform

Rezept

1. Berechne die reduzierte Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix.
2. Beschreibe jede Basisvariable als Linearkombination von freien Variablen.
3. Schreibe eine typische Lösung x als Vektor in dessen Komponenten Konstanten und Linearkombinationen der freien Variable stehen.
4. Zerlege diesen Vektor als Linearkombination von Vektoren mit freien Variablen und ~~evtl. (wenn GLS nicht homogen) einer 1 als Gewichten~~.

Definition

Die Menge von Vektoren $\{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist *linear unabhängig*, wenn 0 keine nichttriviale Linearkombination der $v_1, \ldots, v_p$ ist.
Mit anderen Worten, wenn $\underbrace{\ker(v_1 \ldots v_p)}_{\text{Lösungsmenge } Ax=0} = \{0\}$.

Notiz: $A=(v_1 \ldots v_p)$
$\{v_1, \ldots, v_p\}$ lin. unabhängig, wenn $Ax=0$ keine freien Variablen hat
$\Leftrightarrow$ in jeder Spalte von A ist eine Pivotposition.

Beispiel:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -6 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nicht lin. unabhängig, also linear abhängig, da $A \cdot x = 0$ unendlich viele Lsg hat

Beispiel

$\in \mathbb{R}^3.$

Sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 20 \\ 3123 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4321 \\ 5123 \\ 6123 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 21231 \\ 1123123 \\ 1231231 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 23411 \\ 12341123123 \\ 12341231231 \end{pmatrix}$$

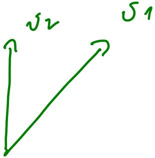
linear unabhängig?

Nein, denn $A = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ hat höchstens $\min\{3,4\} = 3$

Pivotpositionen, aber 4 Spalten.

Zwei Vektoren

Wann sind $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$ linear unabhängig?



wenn sie nicht auf einer Geraden liegen.

Charakterisierung linearer Abhängigkeit

Satz 6

Eine Menge $S = \{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \geqslant 2$ von 2 oder mehr Vektoren ist linear abhängig dann und nur dann, wenn mindestens ein Vektor aus S eine Linearkombination der übrigen Vektoren aus S ist.

Achtung: Wir sagen nicht “jeder Vektor aus S”!

Satz 7

Eine Menge $S = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *von* $p \geqslant n + 1$ *Vektoren aus* $\mathbb{R}^n$ *ist linear abhängig.*