Bisher

erweiterte Koeff. matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Elementare Zeilenop.

Zeilenstufenform

Heute (23.09.2013):

- Textbuch: Kapitel 1.2
  - Basis- und freie Variablen
  - Lösungsmenge eines Gleichungssystems
- Textbuch: Kapitel 1.3, 1.4
- Vektoren und deren Geometrie.
  - $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$
  - Vektorgleichungen
  - Linearkombinationen
  - Die Matrixgleichung $Ax = b$

Basis- und freie Variablen

Definition

Sei ein GLS in (reduzierter) Zeilenstufenform. Die Variablen, die zu Pivotspalten gehören heißen *Basisvariablen*. Alle anderen Variablen sind freie Variablen.

wähle x_3 frei.

x_3 ist freie Variable

x_1, x_2 sind Basisvariablen.

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_1 = 5x_3 + 1.$

$x_2 + x_3 = 4$

$x_2 = 4 - x_3$

Lösungsmenge $L = \{ (5 \cdot x_3 + 1,\ 4 - x_3,\ x_3) : x_3 \in \mathbb{R} \}$

Beispiel

$$
\begin{array}{ccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\
0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7
\end{array}\right)
$$

Basisvariablen: x_1, x_3, x_5

Freie Var.: x_2, x_4.

$x_5 = 7$

x_4 frei

$x_3 = 4x_4 + 5$

x_2 frei

$x_1 = -4 - 6x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 2x_5$

$\quad = \cancel{-4} - 6x_2 - \cancel{10} - 8x_4 + 5x_4 \cancel{+14} = -6x_2 - 3x_4$

Lösungsmenge:

$$L = \{(-6x_2 - 3x_4, x_2, 4x_4 + 5, x_4, 7) : x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{bmatrix}$$

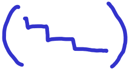
Satz 2

Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn die (reduzierte) Zeilenstufenform keine Zeile der Form

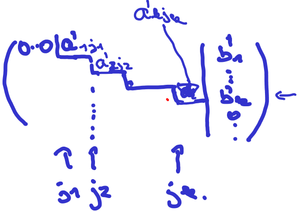
$$(0 \quad \cdots \quad 0 \quad \alpha)$$

enthält, wobei $\alpha \neq 0$.
Ein lösbares lineares GLS hat genau dann eine einzige Lösung wenn jede Variable eine Basisvariable ist.

Begründung: GLS $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ hat dieselbe Lösungsmenge wie die berechnete Zeilenstufenform

. Ist eine Zeile $(0 \dots 0\ \alpha)$, mit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$ vorhanden, so beschreibt diese die Gleichung $0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = \alpha$ nicht lösbar.

Bleibt zz: hat die Zeilenstufenform keine solche Zeile, dann existiert eine Lösung.



Basisvariablen: x_{j_ℓ}, $1 \le \ell \le k$

Freie Variablen: alle anderen.

Lösung: Setze alle freien Variablen auf beliebige Werte

$$a'_{kj_k} \cdot x_{k,j_k} + a'_{kj_k+1} \cdot x_{j_k+1} + \dots + a'_{kn} x_n = b'_k$$

$$\Rightarrow x_{k,j_k} = \frac{b'_k - a'_{kj_k+1} x_{j_k+1} - \dots - a'_{k,n-1} x_{n-1}}{a'_{kj_k}}$$

$\Leftarrow$ letzte Basisvariable festgelegt.

Bestimme den Wert einer beliebigen Basisvariablen x_{j_ℓ}, $1 \leq \ell \leq k$,

wobei die späteren Basisvariablen schon festgelegt wurden.

$$a'_{\ell j_\ell} x_{j_\ell} + a'_{\ell j_\ell+1} x_{j_\ell+1} + \cdots + a'_{\ell n} x_n = b'_\ell$$

$$\Rightarrow \quad x_{j_\ell} = \frac{b'_\ell - a'_{\ell j_\ell+1} x_{j_\ell+1} - \cdots - a'_{\ell n} x_n}{a'_{\ell j_\ell}}$$

$\Rightarrow$ Es gibt eine Lösung.

Wahrhinsieht man: ist GLS lösbar, dann gibt es unendlich viele

Lösungen $\Leftrightarrow$ es gibt mindestens eine freie Variable.

$\blacksquare$

Lösungsmenge

Sei $[A \mid b]$ in Zeilenstufenform, wobei die ersten k Zeilen die Nichtnullzeilen sind. Für $i \in \{1, \dots, k\}$ sei j_i der Spaltenindex des führenden Eintrags der i-ten Zeile. Angenommen, das Gleichungssystem ist lösbar. Die Menge aller Lösungen ist dann

$$L = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) :$$

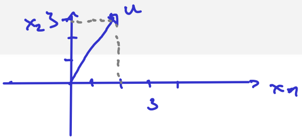
Beweis: Übung!

Weitere Übung: Beweise die folgende Aussage.

Ein lineares Gleichungssystem hat entweder:

a) keine Lösung b) genau eine Lösung c) unendlich viele Lösungen.

Beweis Wir nehmen an, es gibt eine Lösung .....



Definition

Eine Matrix mit nur einer Spalte ist ein *Spaltenvektor* oder auch einfach ein *Vektor*. Die Einträge eines Vektors heißen *Komponenten*

Beispiel

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

mit $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ sind *zweidimensionale Vektoren*, d.h., sie haben zwei Komponenten.
Die Menge aller zweidimensionaler Vektoren wird mit $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

Sprich $\mathbb{R}$ „Roo zwei“.

Definition

Die Menge der Vektoren mit n Komponenten wird mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

wobei $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ wird mit Nullvektor oder 0 bezeichnet.

Summe von Vektoren

Sind

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

n-dimensionale Vektoren, so ist deren *Summe*

$$u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}.$$

$u+v = \begin{pmatrix} 7 \\ 10 \end{pmatrix}$

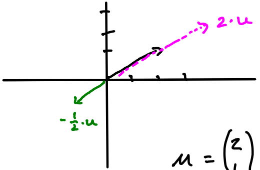
Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Ist

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

dann ist

$$\alpha \cdot u = \begin{pmatrix} \alpha \cdot u_1 \\ \vdots \\ \alpha \cdot u_n \end{pmatrix}$$



$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

das Produkt des *Skalars* α mit u.

$2 \cdot u$

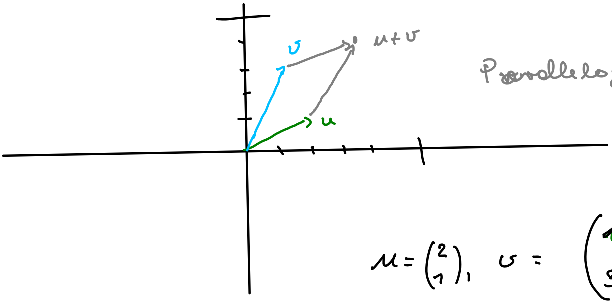
$-\frac{1}{2} \cdot u$

Beispiel $\quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \\ 27 \end{pmatrix}$$

$u - v$ steht für $\quad u + ((-1) \cdot v)$.

Geometrie von $\mathbb{R}^2$



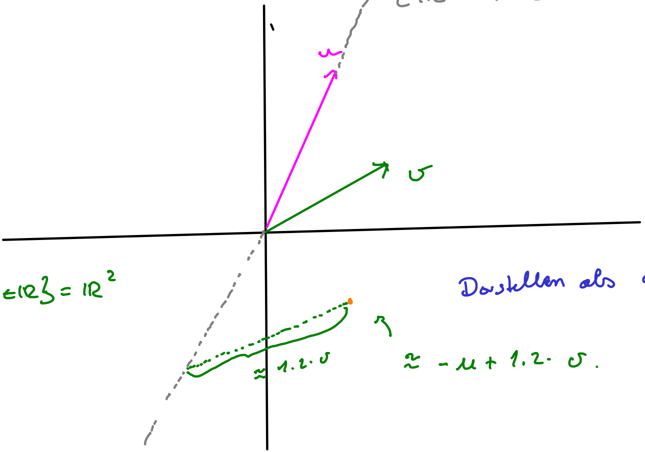
Parallelogram.

$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Die Parallelogrammregel

Sind u und v aus $\mathbb{R}^2$, dann entspricht $u + v$ dem vierten Eckpunkt des Parallelogramms, dessen andere Eckpunkte 0, u und v sind.

$\{x \in \mathbb{R}^2 : x = \alpha \cdot u,\ \alpha \in \mathbb{R}\}$



$\{\alpha \cdot u + \beta \cdot v : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$

Darstellen als $\alpha \cdot u + \beta \cdot v$

$\approx -u + 1.2 \cdot v$.

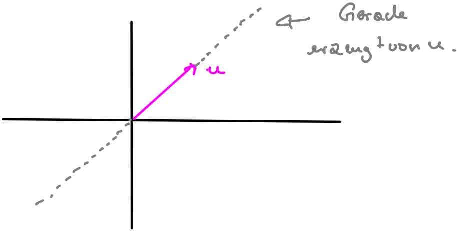
Geraden

Definition

Sei $u \in \mathbb{R}^n$ und $u \neq 0$. Die Menge aller skalaren Vielfachen von u

$$\{\alpha \cdot u \colon \alpha \in \mathbb{R}\}$$

ist eine *Gerade*.



Algebraische Eigenschaften des $\mathbb{R}^n$

Für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gelten

(i) $u + v = v + u$

(ii) $(u+v)+w = u+(v+w)$

(iii) $u + 0 = 0 + u = u$

(iv) $u + (-u) = -u + u = 0$

(v) $\underline{\alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v}$

(vi) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$

(vii) $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$

<u>Beweis:</u> (v) Sei $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$$\alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(u_1+v_1) \\ \vdots \\ \alpha \cdot (u_n+v_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot u_1 + \alpha \cdot v_1 \\ \vdots \\ \alpha \cdot u_n + \alpha \cdot v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u_1 \\ \vdots \\ \alpha \cdot u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha v_1 \\ \vdots \\ \alpha \cdot v_n \end{pmatrix}$$

$$= \alpha \cdot u + \alpha \cdot v.$$

Linearkombinationen

Die LK ist trivial wenn alle Gewichte $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ gleich Null sind.

Definition

Seien $v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$. Der Vektor

$$y = \alpha_1 \cdot v_1 + \overset{\alpha_2 \cdot v_2 + \cdots +}{\cdots} + \alpha_p \cdot v_p$$

ist eine *Linearkombination* der $v_1, \ldots, v_p$ mit *Gewichten* $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$.

Zurück zu Gleichungssystem:

$$2x_1 + 3x_2 = 1$$
$$2x_1 + x_2 = 1$$

x_1, x_2 ist Lösung genau dann, wenn $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ Linearkombination von $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ mit Gewichten x_1, x_2. ist.

Eine Gerade im $\mathbb{R}^n$

ist die Menge der Linearkombinationen eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n$.

Beispiel

Ja denn

$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 = b$ mit $x_2 = 2$ und $x_1 = 3$

Seien

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Vektoren aus $\mathbb{R}^3$. Ist b eine Linearkombination von a_1 und a_2?

GLS

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot 2 \\ \cdot 5 \end{array}$$

mit lösen.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 16 & 32 \end{array}\right] \begin{array}{l} \div 9 \\ \div 16 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vektorgleichungen

Notiz

Eine Vektorgleichung
$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b,$$
mit $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}^m$ und Variablen $x_1, \ldots, x_n$ hat die gleiche Lösungsmenge wie das lineare Gleichungssystem welches durch die erweiterte Koeffizientenmatrix
$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & b \end{pmatrix}$$
beschrieben ist.
Insbesondere ist das lineare GLS (die Vektorgleichung) dann und nur dann lösbar, wenn b eine Linearkombination der $a_1, \ldots, a_n$ ist.

Das Erzeugnis (der Spann)

Definition

Seien $v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$. Die Menge aller Linearkombinationen von $v_1, \ldots, v_p$ ist das *Erzeugnis* von $v_1, \ldots, v_p$ und wird mit

$$\text{Span}\{v_1, \ldots, v_p\} = \{\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_p \cdot v_p \colon \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}\}$$

bezeichnet.

Eben haben wir gesehen $\begin{pmatrix}7\\4\\-3\end{pmatrix} \in \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix}\right\}$

$\text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$ denn $v \in \mathbb{R}^2 \in \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}$

$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & 2 & v_1\\2 & 1 & v_2\end{array}\right)$ Lösbar.

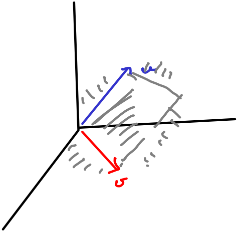
Alle Variablen sind Basisvariablen.

Beispiel: Gerade im $\mathbb{R}^3$

Wenn $v \in \mathbb{R}^3$ und $v \neq 0$, dann ist $\mathrm{Span}\{v\}$ eine Gerade.

Beispiel: Ebene im $\mathbb{R}^3$

Wenn u und v aus $\mathbb{R}^3$, beide $\neq 0$ und u kein Viefaches von v ist, dann ist $\mathrm{Span}\{u, v\}$ die Ebene, die $0, u$ und v enthält.



$A\,x$

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Spalten $a_1, \ldots, a_n$ und sei $x \in \mathbb{R}^n$. Das *Produkt* von A und x, welches mit $A\,x$ bezeichnet wird ist der Vektor

$$A\,x = (a_1, \ldots, a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$$

$A\,x$ ist die Linearkombination der Spalten von A mit den Gewichten $x_1, \ldots, x_n$.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Beispiel:
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$. Schreibe die Linearkombination von v_1, v_2, v_3 mit Gewichten $3, -4, 5$ als Matrix/Vektor Produkt $A\,x$.

Berechnung von $A\,x$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Lineare GLS, Matrixgleichung, Vektorgleichung

Notiz

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Spalten $a_1, \ldots, a_n$, sei $b \in \mathbb{R}^m$ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ein Vektor von Variablen. Die jeweiligen Lösungsmengen der Matrixgleichung

$$A\,x = b \tag{3}$$

der Vektorgleichung

$$x_1\,a_1 + \cdots + x_n\,a_n = b \tag{4}$$

und des linearen GLS mit erweiterter Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & b \end{pmatrix} \tag{5}$$

sind identisch.

Beispiel

Schreibe das lineare GLS als Matrixgleichung und als Vektorgleichung

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2 \cdot x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2 \cdot x_2 & - & 8 \cdot x_3 & = & 8 \\ -4 \cdot x_1 & + & 5 \cdot x_2 & + & 9 \cdot x_3 & = & -9 \end{array}$$