Heute (~~19~~ 18.09.~~2013~~ 2014):

- Mengen: Einführung und Notation
- Zahlenmengen

- Wir lernen diese Fragen zu entscheiden:
  - Ist ein gegebenes lineares GLS lösbar?
  - Wie findet man gegebenenfalls eine Lösung?
  - Wie beschreibt man alle Lösungen?
- Wie?: Jedes lineare GLS hat ein äquivalentes GLS in *Zeilenstufenform*

Heute (~~19~~ 18.09.~~2013~~ 2014):

- Mengen: Einführung und Notation
- Zahlenmengen

- Wir lernen diese Fragen zu entscheiden:
  - Ist ein gegebenes lineares GLS lösbar?
  - Wie findet man gegebenenfalls eine Lösung?
  - Wie beschreibt man alle Lösungen?
- Wie?: Jedes lineare GLS hat ein äquivalentes GLS in *Zeilenstufenform*

Definition

Zwei lineare Gleichungssysteme GLS_1 und GLS_2 sind *äquivalent*, wenn die Mengen Ihrer Lösungen übereinstimmen.

Mengen

Menge

Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen. (naive definition nach Cantor)

Beispiele:

- $N = \{1, 3, a\}$, N ist Menge, die aus den Elementen $1, 2$ und a besteht.
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ist die Menge der *natürlichen Zahlen*
- $M = \{x \colon x \text{ ist Mensch}\}$ ist Menge aller Menschen

Element einer Menge

- Wir schreiben $x \in M$, wenn x ein Element von M ist
- Wir schreiben $x \notin M$, wenn x kein Element von M ist

Beispiele:

- Mit M Menge der Menschen, kann man die Menge der Frauen so beschreiben:
$$F = \{x \in M : x \text{ ist Frau }\}$$
- $H = \{x \in M : x \text{ ist Mann }\}$

Mengenoperationen

Seien A und B zwei Mengen. Wir schreiben

- $A \subseteq B$, wenn für jedes $x \in A$ gilt, dass $x \in B$.
- Wir schreiben $A \supseteq B$, wenn $B \subseteq A$.
- Wir schreiben $A = B$, wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$.

Mengenoperationen (Fortsetzung)

- Die *Vereinigung* von A und B ist die Menge

$$A \cup B = \{x \colon x \in A \text{ oder } x \in M\}.$$

- Die *Schnittmenge* von A und B ist die Menge

$$A \cap B = \{x \colon x \in A \text{ und } x \in B\}.$$

Beispiele:

- $F \subseteq M$
- $H \cap F = \emptyset$
- $H \cup F \neq M$

Mengenoperationen (Fortsetzung)

- Die Menge A "ohne" B ist

$$A \setminus B = \{x\colon x \in A,\, x \notin B\}$$

Beispiel:

- $K = M \setminus (F \cup H)$ ist die Menge der Kinder
- $\mathbb{Z}$ Menge der *ganzen Zahlen* $Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{N} = \mathbb{Z} \setminus \{x \in \mathbb{Z}\colon x < 0\}$.
- $G = \{x \in \mathbb{Z}\colon$ es existiert ein $y \in Z$ mit $x \cdot 2 = y\}$ ist Menge der *geraden Zahlen*

Bezeichnungen für Zahlenmengen

- $\mathbb{N}$: Menge der *natürlichen Zahlen*
- $\mathbb{Z}$: Menge der *ganzen Zahlen*
- $\mathbb{Q} = \{p/q\colon p, q \in Z, \overset{q \neq 0}{\cancel{qneq0}}\}$: Menge der *rationalen Zahlen*
- $\mathbb{R}$: Menge der *reellen Zahlen*

Satz 1

$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Übung:

Zeige: $\sqrt{3}$ ist keine rationale Zahl.

Beispiel

Erweiterte Koeffizienten Matrix

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
0\cdot x_1 & + & \overset{1\cdot x_2}{x_2} & - & 4\cdot x_3 & = & 8\\
2\cdot x_1 & - & 3\cdot x_2 & + & 2\cdot x_3 & = & 1\\
5\cdot x_1 & - & 8\cdot x_2 & + & 7\cdot x_3 & = & 1
\end{array}
$$

$$
\left[\begin{array}{rrr|r}
0 & 1 & -4 & 8\\
2 & -3 & 2 & 1\\
5 & -8 & 7 & 1
\end{array}\right]
\quad \text{vertauschen}
$$

$$
\left[\begin{array}{rrr|r}
2 & -3 & 2 & 1\\
0 & 1 & -4 & 8\\
5 & -8 & 7 & 1
\end{array}\right]
\quad *(-5/2)\ +
\qquad
\left[\begin{array}{rrr|r}
2 & -3 & 2 & 1\\
0 & 1 & -4 & 8\\
0 & -1/2 & 2 & -3/2
\end{array}\right]
\quad (*1/2)\ +
$$

$$
\left[\begin{array}{rrr|r}
2 & -3 & 2 & 1\\
0 & 1 & -4 & 8\\
0 & 0 & 0 & 5/2
\end{array}\right]
$$

Das GLS hat keine Lsg, denn es existieren keine $s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$0\cdot s_1 + 0\cdot s_2 + 0\cdot s_3 = 5/2.$$

Mit anderen Worten: Lösungsmenge $= \emptyset$

→ # Zeilen
→ # Spalten.

Definition

Seien $m, n \in \mathbb{N}_+$.
Eine *$m \times n$-Matrix* A ist eine Liste von $m \cdot n$ rellen Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ die auf die folgende Weise angeordnet sind

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Die Menge der (reellen) $m \times n$-Matrizen bezeichnet man mit $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Quiz

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des unteren GLS

$$\begin{matrix} a_{11} \cdot x_1 + & \cdots & a_{1n} \cdot x_n & = b_1 \\ & \vdots & & \\ a_{m1} \cdot x_1 + & \cdots & a_{mn} \cdot x_n & = b_m \end{matrix},$$

ist ein Element von

$\mathbb{R}^{m \times n}$ $\mathbb{R}^{(m+1) \times n}$ $\mathbb{R}^{m \times (n+1)}$

Intuition Zeilenstufenform

Betrachte die folgenden erweiterten Koefizientenmatrizen. Welche der dazugehörigen Gleichungssysteme

1. ist nicht lösbar
2. hat genau eine Lösung
3. hat unendlich viele Lösungen?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

1

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

3

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

2

Nullzeilen und führender Eintrag

Betrachte die Matrix

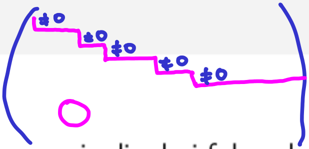
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die i-te Zeile von A ist eine *Nullzeile*, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$.
Der *führende Eintrag* einer Zeile, die keine Nullzeile ist, ist der am weitesten links stehende Eintrag $\neq 0$.

$3 = a_{23}$ ist führender Eintrag der 2 Zeile.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nullzeile $\rightarrow$



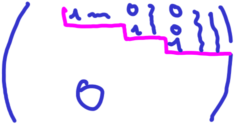
Definition

Eine Matrix ist in *Zeilenstufenform*, wenn sie die drei folgenden Eigenschaften erfüllt:

1. Die Nullzeilen liegen unter den Nichtnullzeilen.
2. Bei zwei aufeinanderfolgenden Nichtnullzeilen ist der führende Eintrag der unteren Zeile rechts vom führenden Eintrag der oberen Zeile.
3. Alle Einträge einer Spalte unter einem führenden Eintrag sind Nullen (0).

Wenn die Matrix zusätzlich noch die folgenden Eigenschaften erfüllt, dann ist sie in *reduzierter Zeilenstufenform*.

4. Der führende Eintrag jeder Nichtnullzeile ist 1.
5. Jeder führende Eintrag ist der einzige Eintrag $\neq 0$ in der dazugehörigen Spalte.



$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccc|c}
0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Lösung:

$x_6 = 5$

$x_5 = x_4 = 0$

$x_3 = 2$

$x_2 = 3$

$x_1 = 0$

ist eine Lösung.

Schritt 1

Beginne mit der Nichtnullspalte, die am weitesten links steht. Diese Spalte ist eine *Pivotspalte*. Die Pivotposition ist das oberste Element der Spalte.

Pivotposition.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{0} & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{array}\right)$$

Ein Algorithmus zur Überführung in Zeilenstufenform

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{array}\right)$$

Schritt 2

Wähle einen Nichtnulleintrag aus der Spalte aus und vertausche gegebenenfalls Zeilen um diesen Eintrag in die Pivotposition zu bringen

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right)$$

Ein Algorithmus zur Überführung in Zeilenstufenform

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right) \quad (\cdot -1) \; + \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right)$$

Schritt 3

Wende Ersetzungsoperationen an, um alle Eintraege unter der Pivotposition zu 0-Eintraegen zu machen.

Ein Algorithmus zur Überführung in Zeilenstufenform

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{array}\right)$$

$\cdot -3/2$ $+$

nur eine Zeile hat oder

Schritt 4

Wenn die Matrix außer der ersten Zeile nur Nullzeilen hat, dann Stopp. Andernfalls führe die Schritte (1-4) auf der Matrix aus, die man aus dem Löschen der ersten Zeile erhält und füge anschließend die gelöschte Zeile oben an der Ergebnismatrix an.

Ein Algorithmus zur Überführung in Zeilenstufenform

$$
\begin{array}{cccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\
\end{array}
$$

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\
0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4
\end{array}\right)
$$

Lösung:

$x_5 = 4$

$x_4 = 0$

$x_3 = 0$

$x_2 = -7$

$x_1 =$

Schritt 5

Skaliere jede Nichtnullzeile, sodaß das dazugehörige Pivotelement (führender Eintrag) 1 wird. Erzeuge Nullen über jedem Pivotelement durch Ersetzungsoperationen.

Basis- und freie Variablen

Definition

Sei ein GLS in reduzierter Zeilenstufenform. Die Variablen, die zu Pivotspalten gehören heißen *Basisvariablen*. Alle anderen Variablen sind freie Variablen.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Lösbarkeit

Satz 2

Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn die (reduzierte) Zeilenstufenform keine Zeile der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

enthält, wobei $\alpha \neq 0$.

Ein lösbares lineares GLS hat genau dann eine einzige Lösung wenn jede Variable eine Basisvariable ist.

Lösbarkeit

Satz 2

Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn die (reduzierte) Zeilenstufenform keine Zeile der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

enthält, wobei $\alpha \neq 0$.
Ein lösbares lineares GLS hat genau dann eine einzige Lösung wenn jede Variable eine Basisvariable ist.

Lösbarkeit

Satz 2

Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn die (reduzierte) Zeilenstufenform keine Zeile der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

enthält, wobei $\alpha \neq 0$.
Ein lösbares lineares GLS hat genau dann eine einzige Lösung wenn jede Variable eine Basisvariable ist.

Lösbarkeit

Satz 2

Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn die (reduzierte) Zeilenstufenform keine Zeile der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

enthält, wobei $\alpha \neq 0$.
Ein lösbares lineares GLS hat genau dann eine einzige Lösung wenn jede Variable eine Basisvariable ist.

Lösbarkeit

Satz 2

Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn die (reduzierte) Zeilenstufenform keine Zeile der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

enthält, wobei $\alpha \neq 0$.

Ein lösbares lineares GLS hat genau dann eine einzige Lösung wenn jede Variable eine Basisvariable ist.