Heute (26.09.2013):

- Textbuch: Kapitel 1.5, 1.7, 1.8
- Mehr zum Produkt Ax
- Beschreibung von Lösungsmengen linearer GLS
- Kern einer Matrix
- Lineare Unabhängigkeit
- Lineare Abbildungen

$m \{ \boxed{a_1 \cdots a_n} \}^n$

Satz

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Die folgenden Eigenschaften sind logisch äquivalent:

a) Für alle $b \in \mathbb{R}^m$ ist $Ax = b$ lösbar.

b) Jedes $b \in \mathbb{R}^m$ ist eine Linearkombination der Spalten von A.

c) Die Spalten von A erzeugen $\mathbb{R}^m$.

d) A hat in jeder Zeile eine Pivotposition.

a) ⇒ b) $\quad A \cdot x = x_1 \cdot a_1 + \cdots + x_n \cdot a_n = b \quad$ b Lin. Komb. der Spalten von A mit Gew. $x_1, \ldots, x_n$

b.) ⇒ c) (✓)

c) ⇒ d) Nehmen wir an, A hat nicht in jeder Zeile eine Pivotpos.

Wir wissen $Ax = b$ lösbar ⇔ $A' x = b'$ lösbar.

$[A \,\vdots\, b]$ Element. Zeilenop $\longrightarrow$ $\left(\begin{array}{c:c} A' & b' \\ 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 \cdots 0 & 0 \end{array}\right)$

beliebig

mindestens eine Nullzeile in veränderter Koeffizientenmatrix.

Da c) ⇒ $Ax = b$ und $A'x = b'$ immer lösbar.

Wähle $b' = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dann ist $A' \cdot x = b'$ nicht lösbar. ~~da~~ Da es Umkehrzeilenoperation

$$(A' \mid b') \xrightarrow[\text{der Zeilen op}]{\text{Umkehrung}} (A \mid b)$$

mit $Ax = b$ nicht lösbar $\lightning$

d) $\Rightarrow$ a) bereits bekannt.

$\square$

Eigenschaften des Matrix/Vektor Produktes

Satz

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $u, v \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Es gelten

i) $A(u+v) = Au + Av$

ii) $A(\alpha u) = \alpha(Au)$

Beweis: Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

zu i): $A \cdot (u+v) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} (u_1+v_1) \\ (u_2+v_2) \\ \vdots \\ (u_n+v_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(u_1+v_1) + \cdots + a_{1n}(u_n+v_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(u_1+v_1) + \cdots + a_{mn}(u_n+v_n) \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a_{11}(u_1+v_1)+\dots+a_{1n}(u_n+v_n) \\ \vdots \\ a_{m1}(u_1+v_1)+\dots+a_{mn}(u_n+v_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\cdot u_1+a_{11}v_1+\dots \quad a_{1n}u_n+a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}u_1+a_{m1}v_1+\dots \quad +a_{mn}u_n+a_{mn}v_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}u_1+a_{12}u_2+\dots+a_{1n}u_n+a_{11}v_1+\dots+a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}u_1+\dots+a_{mn}u_n+a_{m1}v_1+\dots+a_{mn}v_n \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + \dots + a_{1n}u_n + a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n \\ \vdots \\ a_{m1}u_1 + \dots + a_{mn}u_n + a_{m1}v_1 + \dots + a_{mn}v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}u_1 + \dots + a_{1n}u_n \\ \vdots \\ a_{m1}u_1 + \dots + a_{mn}u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + \dots + a_{1n}v_n \\ \\ a_{m1}v_1 + \dots + a_{mn}v_n \end{bmatrix}$$

$$= A \cdot u + A \cdot v$$

Zu ii): Ähnlich.

$\square$

Lösungsmengen linearer GLS: Parametrisierte Vektorform

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3\cdot x_1 & + & 5\cdot x_2 & - & 4\cdot x_3 & = & 0 \\ -3\cdot x_1 & - & 2\cdot x_2 & + & 4\cdot x_3 & = & 0 \\ 6\cdot x_1 & + & x_2 & - & 8\cdot x_3 & = & 0 \end{array}$$

→ homogenes GLS.

Erw. Koeff. matrix:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ -3 & -2 & 4 & 0 \\ 6 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(\cdot 1)\,+,\ (\cdot(-2))\,+} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{(\cdot 3)\,+}$$

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$x_2 = 0$

$3\cdot x_1 = 4\cdot x_3$

$x_1 = 4/3\cdot x_3$

x_3 ist frei.

Eine Lösung ist von der Form:

$$\begin{bmatrix} 4/3\cdot x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3\cdot\begin{pmatrix} 4/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungsmengen linearer GLS: Parametrisierte Vektorform

Beispiel:

$$10 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 0$$

einzige Pivotpos.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & -3 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

x_1 : Basisvar.

x_2, x_3: frei.

$$x_1 = \frac{3}{10} x_2 + \frac{1}{5} x_3$$

Lösungen sind von der Form:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{10} x_2 + \frac{1}{5} \cdot x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \cdot \begin{bmatrix} 3/10 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \cdot \begin{bmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

wobei $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

Homogene und inhomogene GLS

$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0$

$\vdots$

$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0$

Definition

Ein lineares GLS der Form

$$Ax = 0 \tag{6}$$

ist ein *homogenes lineares GLS*.

Der *Kern* einer Matrix A ist die Menge der Lösungen von (6) und wird mit $\ker(A)$ bezeichnet.

Parametrisierte Vektorform: Beispiel inhomogenes GLS

Sei

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & & \\ \multicolumn{6}{c}{\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)} \end{array}$$

die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen GLS (evtl. nach elementaren Zeilenop.). Beschreibe die Menge aller Lösungen in parametrisierter Vektorform.

Basisvar: x_1, x_3 $\qquad x_3 = 1 - 3x_4$

Frei: x_2, x_4 $\qquad x_1 = 2 - 4 \cdot x_4$

Lösungen sind von der Form

$$\begin{bmatrix} 2 - 4 \cdot x_4 \\ x_2 \\ 1 - 3x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Lösungsmengen inhomogener linearer GLS

$\ker(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x = 0\}$

Satz

Sei $Ax = b$ ein lösbares lineares GLS und x^* eine Lösung. Die Menge aller Lösungen ist

$$\{x^* + u : u \in \ker(A)\}$$

Beweis: Wie beweist man $M_1 = M_2$ für Mengen M_1, M_2. ?

2 Schritte: „$\subseteq$" zeige für alle $m \in M_1$ gilt $m \in M_2$

„$\supseteq$" " $m \in M_2$ " $m \in M_1$.

„$\subseteq$" Sei $\tilde{x}$ eine Lösung von $Ax = b$. Betrachte $u = \tilde{x} - x^*$

Dann gilt $\tilde{x} = x^* + u$. und $A \cdot u = A(\tilde{x} - x^*) = \underbrace{A \cdot \tilde{x}}_{=b} - \underbrace{A \cdot x^*}_{=b} = 0$

„$\supseteq$" z.z.: Wenn $u \in \ker(A)$, dann gilt $A(x^* + u) = b$. $A(x^* + u) = \underbrace{A \cdot x^*}_{=b} + \underbrace{A \cdot u}_{=0} = b$ $\boxed{\text{E}}$

Berechnen der Lösungsmenge in parametrisierter Vektorform

Rezept

1. Berechne die reduzierte Zeilenstufenform der erweiterten Koeffizientenmatrix.
2. Beschreibe jede Basisvariable als Linearkombination von freien Variablen.
3. Schreibe eine typische Lösung x als Vektor in dessen Komponenten Konstanten und Linearkombinationen der freien Variable stehen.
4. Zerlege diesen Vektor als Linearkombination von Vektoren mit freien Variablen und evtl. (wenn GLS nicht homogen) einer 1 als Gewichten.

Lineare Unabhängigkeit

$A = (v_1\ v_2 \cdots v_p)$

Spaltm.

Definition

Die Menge von Vektoren $\{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist *linear unabhängig*, wenn 0 keine nichttriviale Linearkombination der $v_1, \ldots, v_p$ ist.
Mit anderen Worten, wenn $\ker(v_1 \ldots v_p) = \{0\}$. $\subseteq \mathbb{R}^p$

Beispiel:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \cdot(-2)+,\ \cdot(-3)+$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -6 & 0 \end{array}\right] \quad \cdot(-2)+$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

hat 0-Zeile

∞ Lsg. da nicht in jeder Zeile Pivotpos.

$\Rightarrow \exists$ nichttr. Lsgen $(v_1 v_2 v_3)x = 0$

$\Rightarrow v_1, v_2, v_3$ lin. abh.

Beispiel

Sind

$$v_1 = \begin{pmatrix} 100 \\ 20 \\ 3123 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4321 \\ 5123 \\ 6123 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 21231 \\ 1123123 \\ 1231231 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 23411 \\ 12341123123 \\ 12341231231 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig?

Nein!

$(v_1\, v_2\, v_3\, v_4)\, x = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(A \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right)$ E.K.M.

$\Rightarrow$ Zeilenstufenform:

höchstens 3 Stufen bzw. Pivotpositionen $\Rightarrow$ mindestens eine freie Var $\Rightarrow \infty$ viele Lösungen

Zwei Vektoren

Wann sind $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$, $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$ linear unabhängig?

$$\nexists \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$$

v_1, v_2 lin. abhängig

$\Rightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha \cdot v_1 = v_2$

es existiert ein

Charakterisierung linearer Abhängigkeit

Satz

Eine Menge $S = \{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$, $p \geqslant 2$ von 2 oder mehr Vektoren ist linear abhängig dann und nur dann, wenn mindestens ein Vektor aus S eine Linearkombination *der übrigen* Vektoren aus S ist.

Achtung: Wir sagen nicht "jeder Vektor aus S"!

Beweis: „$\Leftarrow$" Sei v_i eine Linearkombination der übrigen Vektoren.

$$v_i = x_1 \cdot v_1 + \cdots + x_{i-1} v_{i-1} + x_{i+1} \cdot v_{i+1} + \cdots + x_p \cdot v_p \quad \Big| - v_i$$

$$\Downarrow$$

$$0 = x_1 \cdot v_1 + \cdots + x_{i-1} \cdot v_{i-1} (-1) \cdot v_i + x_{i+1} v_{i+1} + \cdots + x_p \cdot v_p$$

$\Rightarrow v_1, \ldots, v_p$ lin. abh.

„$\Rightarrow$" ähnlich.

Satz

Eine Menge $S = \{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ von $p \geqslant n+1$ Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ ist linear abhängig.

Beweis: Die erweiterte Koeff matrix von $(v_1, \ldots, v_p) \cdot x = 0$ wird in red. Zeilenstufenform überführt.

$$n\left\{\left(\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{p>n+1}\right)\right. \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

n Stufen
und > n Spalten
$\Rightarrow$ mindestens eine freie Var. $\Rightarrow$ $(v_1 \cdots v_p)x=0$
hat ∞-viele Lsg.
$\Rightarrow$ S ist lin. abh. $\blacksquare$

Quiz

Sei $S = \{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$ und $0 \in S$. Kann S linear unabhängig sein.

Nein!

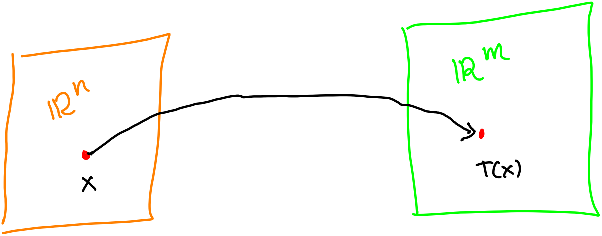
Abbildungen

Definition

Eine *Abbildung* oder *Funktion* T von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ ist eine Vorschrift, die jedem $x \in \mathbb{R}^n$ einen Vektor $T(x) \in \mathbb{R}^m$ zuweist.

Schule:

$f(x) = x^2$



Beispiel:

$T: \underline{\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2},$

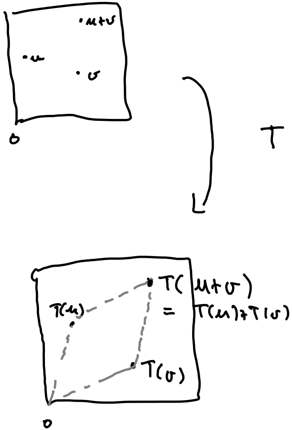
$$T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Definition Abbildung

Eine Funktion $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ist *linear*, wenn

i) $T(u+v) = T(u) + T(v)$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^n$.

ii) $T(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot T(u)$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und $u \in \mathbb{R}^n$.



$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$T(x) = Ax$ ist lineare Abbildung von $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Gibt es sonst noch lineare Abbildungen?

Verträglichkeit mit Multiplikation und Addition

Beobachtung

Wenn $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung ist, dann gilt mit Vektoren $v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$ und Skalaren $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$

$$T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_p T(v_p).$$

$T(x) = A\,x$

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, dann ist $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit $T(x) = Ax$ eine lineare Abbildung.

Scherung

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Ist jede lineare Abbildung von der Form Ax?