Heute (24.09.2013):

- Vektoren und deren Geometrie.
- Textbuch: Kapitel 1.3, 1.4
  - $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^n$
  - Vektorgleichungen
  - Linearkombinationen
  - Die Matrixgleichung $Ax = b$

Vektoren

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3.5 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{erste Komponente}$$

Definition

Eine Matrix mit nur einer Spalte ist ein *Spaltenvektor* oder auch einfach ein *Vektor*. Die Einträge eines Vektors heißen *Komponenten*

Beispiel

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},$$

mit $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ sind *zweidimensionale Vektoren*, d.h., sie haben zwei Komponenten.

Die Menge aller zweidimensionaler Vektoren wird mit $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

$\in \mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Definition

Die Menge der Vektoren mit n Komponenten wird mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Sprich: "R hoch n"

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

wobei $u_1, u_2, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$

Der Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ wird auch Nullvektor genannt und manchmal mit 0 bezeichnet.

Summe von Vektoren

Sind

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

n-dimensionale Vektoren, so ist deren *Summe*

$$u + v = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}.$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Ist

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \overset{\text{Skalar}}{\alpha} \in \mathbb{R}$$

dann ist

$$\alpha \cdot u = \begin{pmatrix} \alpha \cdot u_1 \\ \alpha \cdot u_2 \\ \vdots \\ \alpha \cdot u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

das Produkt des *Skalars* α mit u.

Beispiel:

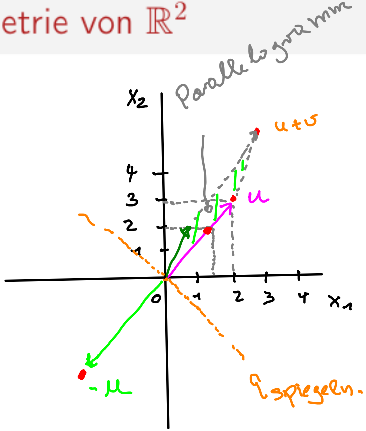
$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 14 \end{pmatrix}$$

$$0 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$u, v \in \mathbb{R}^n$

$$u - v \overset{\text{def}}{=} u + (-1) \cdot v$$

Geometrie von $\mathbb{R}^2$



$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2} \cdot u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.5 \end{pmatrix}$

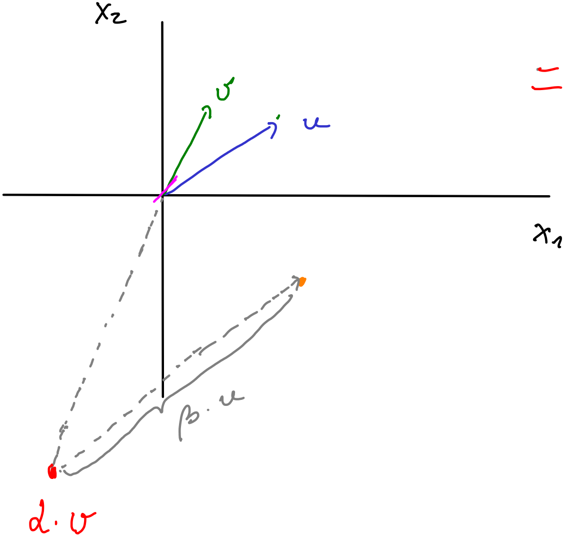
$-u$

Die Parallelogrammregel

Sind u und v aus $\mathbb{R}^2$, dann entspricht $u + v$ dem vierten Eckpunkt des Parallelogramms, dessen andere Eckpunkte 0, u und v sind.

$\{\alpha \cdot u + \beta \cdot v : \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ beliebig$\}$

$= \mathbb{R}^2$



Geraden

u nicht $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

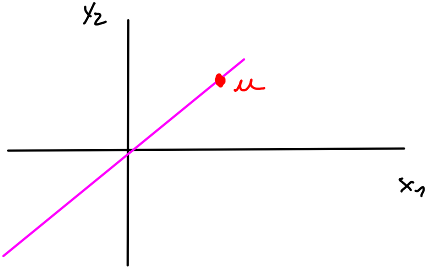
Definition

Sei $u \in \mathbb{R}^n$ und $u \neq 0$. Die Menge aller skalaren Vielfachen von u

$$\{\alpha \cdot u \colon \alpha \in \mathbb{R}\}$$

ist eine *Gerade*.

die Menge der Vektoren $\alpha \cdot u$, wobei $\alpha \in \mathbb{R}$.



Algebraische Eigenschaften des $\mathbb{R}^n$

Für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gelten

(i) $u + v = v + u$ (Kommutativität)

(ii) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (Assoziativ)

(iii) $u + 0 = 0 + u = u$

(iv) $u + (\underbrace{-u}_{=(-1)\cdot u}) = -u + u = 0$

Distr.

(v) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$

(vi) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$

(vii) $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$

Linearkombinationen

p-Stück

Definition

Seien $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$. Der Vektor

$$y = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_p \cdot v_p$$

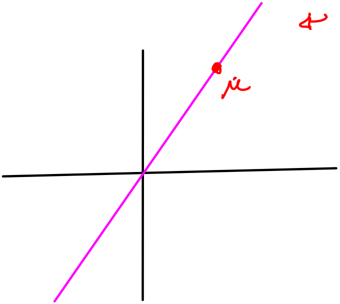
ist eine *Linearkombination* der $v_1, \dots, v_p$ mit *Gewichten* $\alpha_1, \dots, \alpha_p$.

Die LK ist trivial, wenn alle $\alpha_i = 0$, $i = 1, \dots, p$.

Eine Gerade

Ist die Menge der Linearkomb. die man mit einem Vektor $\neq 0$ und beliebigem Skalar erzeugt.

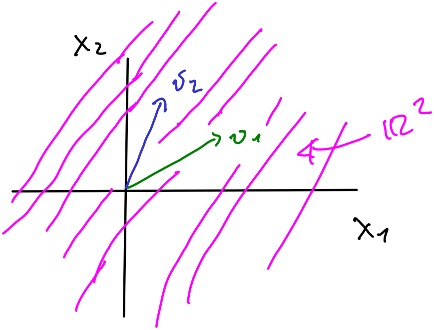
$g = \{\alpha \cdot u : \alpha \in \mathbb{R}\}$



$\mathbb{R}^2$ als Linearkombinationen zweier Vektoren

Seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$, $v_1 \neq 0$, $v_2 \neq 0$, und v_1 nicht auf der Gerade von v_2, dann ist

$$\mathbb{R}^2 = \{ \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \}$$



Beispiel

Seien

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Vektoren aus $\mathbb{R}^3$. Ist b eine Linearkombination von a_1 und a_2?

b ist ein lin. Komb von a_1, a_2 genau dann wenn

$x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 = b$ lösbar mit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

genau dann wenn lin. GLS.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 7 \\ -2x_1 + 5x_2 &= 5 \\ -5x_1 + 6x_2 &= -3 \end{aligned}$$

lösbar ist.

Erw. Koeff. Matrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -2 & 5 & 4 \\ -5 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

Def: Seien $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}^m$

Eine Gleichung

$$x_1 \cdot a_1 + \ldots + x_n \cdot a_n = b$$ in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$

heißt Vektorgleichung.

Vektorgleichungen

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Notiz

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

Eine Vektorgleichung

$$x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n = b,$$

mit $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}^m$ und Variablen $x_1, \ldots, x_n$ hat die gleiche Lösungsmenge wie das lineare Gleichungssystem welches durch die erweiterte Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & b \end{pmatrix}$$

beschrieben ist.
Insbesondere ist das lineare GLS (die Vektorgleichung) dann und nur dann lösbar, wenn b eine Linearkombination der $a_1, \ldots, a_n$ ist.

Das Erzeugnis (der Spann)

Definition

Seien $v_1, \dots, v_p \in \mathbb{R}^n$. Die Menge aller Linearkombinationen von $v_1, \dots, v_p$ ist das *Erzeugnis* von $v_1, \dots, v_p$ und wird mit

$$\operatorname{Span}\{v_1, \dots, v_p\} = \{\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_p \cdot v_p \colon \alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}\}$$

wobei

bezeichnet.

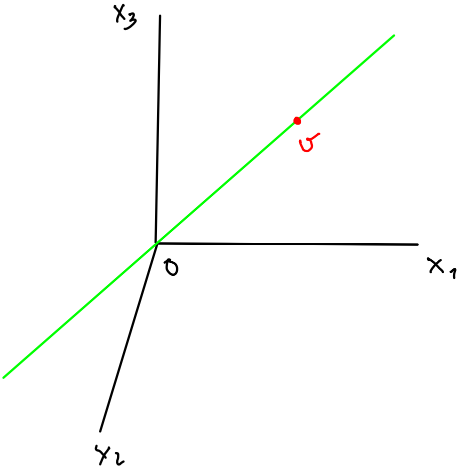
Bsp: $\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2$

$$\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}0\\x\\y\end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Beispiel: Gerade im $\mathbb{R}^3$

nicht $\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}$

Wenn $v \in \mathbb{R}^3$ und $v \neq 0$, dann ist $\mathrm{Span}\{v\}$ eine Gerade.

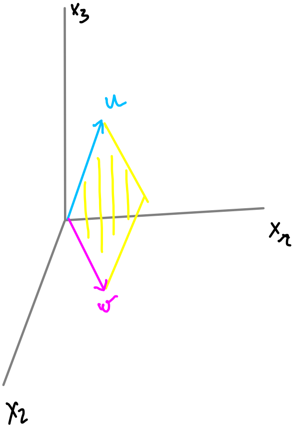


$$= \{\alpha \cdot v : \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Beispiel: Ebene im $\mathbb{R}^3$

liegt nicht auf der Geraden von

Wenn u und v aus $\mathbb{R}^3$, beide $\neq 0$ und u kein Viefaches von v ist, dann ist $\mathrm{Span}\{u, v\}$ die Ebene, die $0, u$ und v enthält.



$$\mathrm{Span}\{u, v\} = \{\alpha \cdot u + \beta \cdot v : \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

$A\,x$

Anz. Zeilen Anz. Spalten

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit Spalten $a_1, \ldots, a_n$ und sei $x \in \mathbb{R}^n$. Das *Produkt* von A und x, welches mit $A\,x$ bezeichnet wird ist der Vektor

$$A\,x = (a_1, \ldots, a_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n \in \mathbb{R}^m$$

$A\,x$ ist die Linearkombination der Spalten von A mit den Gewichten $x_1, \ldots, x_n$.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 1 + 2\cdot 3 - 1\cdot 7 \\ 0\cdot 4 - 5\cdot 3 + 3\cdot 7 \end{pmatrix}$

$a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

Beispiel:

$$\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 8 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 2 - 7\cdot 3 \\ 4\cdot 8 + 0 \\ -5\cdot 4 + 2\cdot 7 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$. Schreibe die Linearkombination von v_1, v_2, v_3 mit Gewichten $3, -4, 5$ als Matrix/Vektor Produkt $A\,x$.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} v_1, v_2, v_3 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$

Spalten

Berechnung von $A\,x$

Beispiel:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2\cdot x_2 - x_3 \\ 3\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 2\cdot x_3 \\ 2\cdot x_1 + 4x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

Lineare GLS, Matrixgleichung, Vektorgleichung

Notiz

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Spalten $a_1, \dots, a_n$, sei $b \in \mathbb{R}^m$ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ein Vektor von Variablen. Die jeweiligen Lösungsmengen der Matrixgleichung

$$A\,x = b \tag{3}$$

der Vektorgleichung

$$x_1\,a_1 + \cdots + x_n\,a_n = b \tag{4}$$

und des linearen GLS mit erweiterter Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & b \end{pmatrix} \tag{5}$$

Spalten

sind identisch.

Beispiel

Schreibe das lineare GLS als Matrixgleichung und als Vektorgleichung

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2\cdot x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2\cdot x_2 & - & 8\cdot x_3 & = & 8 \\ -4\cdot x_1 & + & 5\cdot x_2 & + & 9\cdot x_3 & = & -9 \end{array}$$

$Ax=b$

Vektorgl.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$$

und $b \in \mathbb{R}^m$

Satz

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Die folgenden Eigenschaften sind logisch äquivalent:

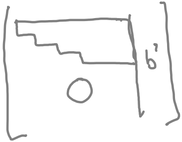
a) Für alle $b \in \mathbb{R}^m$ ist $Ax = b$ lösbar. $x_1 \cdot a_1 + \dots + x_n \cdot a_n = b$

b) Jedes $b \in \mathbb{R}^m$ ist eine Linearkombination der Spalten von A.

c) Die Spalten von A erzeugen $\mathbb{R}^m$.

d) A hat in jeder Zeile eine Pivotposition.

c) $\Rightarrow$ d)



Eigenschaften des Matrix/Vektor Produktes

Satz

Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $u, v \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Es gelten

i) $A(u + v) = Au + Av$

ii) $A(\alpha u) = \alpha(Au)$

Satz: Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^m$, $b \in \mathbb{R}^m$ und sei die Vektorgleichung

$(*)$ $\quad x_1 \cdot a_1 + \dots + x_n \cdot a_n = b$ lösbar.

$(*)$ Hat unendlich viele Lösungen $\underset{\substack{\text{genau dann} \\ \text{wenn}}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ist eine nichttriviale LK von $a_1, \dots, a_n$

Beweis: "$\Rightarrow$" Da es unendlich viele Lösungen von $(*)$ gibt es zwei verschiedene

$(x_1, \dots, x_n)$

$(y_1, \dots, y_n)$

$$\underbrace{(x_1 - y_1)}_{\in \mathbb{R}} \cdot a_1 + \dots + \underbrace{(x_n - y_n)}_{\in \mathbb{R}} \cdot a_n = 0 \quad (**)$$, da

Da $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ existiert ein Index $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $x_i - y_i \neq 0$

$\Rightarrow$ $(**)$ ist nichttriv. LK von $a_1, \dots, a_n$

$x_1 \cdot a_1 + \dots + x_n \cdot a_n = b$

$y_1 a_1 + \dots + y_n \cdot a_n = b$

$(x_1 - y_1) \cdot a_1 + \dots + (x_n - y_n) a_n = 0$

"$\Leftarrow$" Übung.