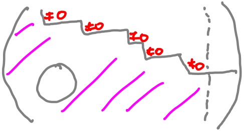
Heute (19.09.2013):

- Wir lernen diese Fragen zu entscheiden:
  - Ist ein gegebenes lineares GLS lösbar?
  - Wie findet man gegebenenfalls eine Lösung?
  - Wie beschreibt man alle Lösungen?
- Wie?: Jedes lineare GLS hat ein äquivalentes GLS in *Zeilenstufenform*



← erweiterte Koeff matrix

Heute (19.09.2013):

- Wir lernen diese Fragen zu entscheiden:
  - Ist ein gegebenes lineares GLS lösbar?
  - Wie findet man gegebenenfalls eine Lösung?
  - Wie beschreibt man alle Lösungen?
- Wie?: Jedes lineare GLS hat ein äquivalentes GLS in *Zeilenstufenform*

Definition

Zwei lineare Gleichungssysteme GLS_1 und GLS_2 sind *äquivalent*, wenn die Mengen Ihrer Lösungen übereinstimmen.

Beispiel

$$\begin{array}{rcrcrcl} & & x_2 & - & 4\cdot x_3 & = & 8 \\ 2\cdot x_1 & - & 3\cdot x_2 & + & 2\cdot x_3 & = & 1 \\ 5\cdot x_1 & - & 8\cdot x_2 & + & 7\cdot x_3 & = & 1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{array}\right] \text{ vertauschen}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 5 & -8 & 7 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(-5/2) \\ \\ + \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -1/2 & 2 & -3/2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot(1/2) \\ + \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc:c} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 5/2 \end{array}\right]$$

IN Gleichungsform:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 & = & 1 \\ x_2 - 4x_3 & = & 8 \\ 0 & = & 5/2 \end{array}$$

Nicht lösbar

!!!

Matrizen

Anzahl Zeilen
" Spalten der Matrix.

Definition

Seien $m, n \in \mathbb{N}_+$. $\to \{1, 2, 3, \ldots\}$

Eine $m \times n$-*Matrix* A ist eine Liste von $m \cdot n$ rellen Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ die auf die folgende Weise angeordnet sind

Spalte (2. Spalte)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = A$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{13} = 7$

m-te Zeile

Die Menge der (reellen) $m \times n$-Matrizen bezeichnet man mit $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Quiz

Die erweiterte Koeffizientenmatrix des unteren GLS

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}\cdot x_1 + & \cdots & + a_{1n}\cdot x_n & = b_1 \\ & \vdots & & \\ a_{m1}\cdot x_1 + & \cdots & + a_{mn}\cdot x_n & = b_m \end{array},$$

ist ein Element von

$\mathbb{R}^{m\times n}$ $\mathbb{R}^{(m+1)\times n}$ $\mathbb{R}^{m\times(n+1)}$

Intuition Zeilenstufenform

Betrachte die folgenden erweiterten Koefizientenmatrizen. Welche der dazugehörigen Gleichungssysteme

1. ist nicht lösbar
2. hat genau eine Lösung
3. hat unendlich viele Lösungen?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right), \quad (1)$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}, \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right), \quad (2)$$

(3)

x_3 ist frei!

es gibt keine freien VARIABLEN

Nullzeilen und führender Eintrag

Betrachte die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{1. Zeile} \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \end{array}$$

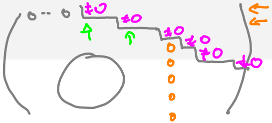
$i \in \{1, \ldots, m\}$

Die i-te Zeile von A ist eine *Nullzeile*, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Der *führende Eintrag* einer Zeile, die keine Nullzeile ist, ist der am weitesten links stehende Eintrag $\neq 0$.

Führender Eintrag

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 0 & 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

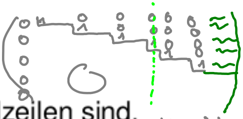
Zeilenstufenform



Bsp. für

Definition

Eine Matrix ist in *Zeilenstufenform*, wenn sie die drei folgenden Eigenschaften erfüllt:



evtl. weit

1. Jede Nullzeile liegt unter jeder Nichtnullzeile.
2. Wenn zwei aufeinanderfolgende Zeilen beide keine Nullzeilen sind, dann ist der führende Eintrag der unteren Zeile in einer Spalte rechts von der Spalte, in der der führende Eintrag der oberen Zeile steht.
3. Alle Einträge einer Spalte unter einem führenden Eintrag sind Nullen (0).

Wenn die Matrix zusätzlich noch die folgenden Eigenschaften erfüllt, dann ist sie in *reduzierter Zeilenstufenform*.

4. Der führende Eintrag jeder Nichtnullzeile ist 1.
5. Jede führende 1 ist der einzige Eintrag $\neq 0$ in der dazugehörigen Spalte.

Ein Algorithmus zur Überführung in Zeilenstufenform

Schritt 1

Beginne mit der Nichtnullspalte, die am weitesten links steht. Diese Spalte ist eine Pivotspalte. Die Pivotposition ist ~~das~~ die oberste ~~Element~~ Komponente der Spalte.

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

Vertauschung

soll in Pivotposition

Schritt 2

Wähle einen Nichtnulleintrag aus der Spalte aus und vertausche gegebenenfalls Zeilen um diesen Eintrag in die Pivotposition zu bringen

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{3} & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} (*-1) \\ + \\ \end{array} \qquad \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Schritt 3

Wende Ersetzungsoperationen an, um alle Eintraege unter der Pivotposition zu 0-Eintraegen zu machen.

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & \boxed{2} & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

→ Ausblenden

$(* -3/2)$

→ damit weitermachen

\+ Ergebnis

Pivot pos.

einfügen →

3 -9 12 -9 6 15

0

Ergebnis der Rekursion.

Schritt 4

Wenn die Matrix außer der ersten Zeile nur Nullzeilen hat, dann Stopp. Andernfalls führe die Schritte (1-4) auf der Matrix aus, die man aus dem Löschen der ersten Zeile erhält und füge anschließend die gelöschte Zeile oben an der Ergebnismatrix an.

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}$$

$\boxed{x_5 = 4}$

$x_4 = 0$

$x_3 = 0$

$2 \cdot x_2 + 2 \cdot 4 = -6$

$x_2 = -7$

$3 \cdot x_1 - 9 \cdot (-7) + 6 \cdot 4 = 15$

$\boxed{x_1 = -24}$

$3 \cdot x_1 = 15 - 24 - 63$

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad + (*-2) \quad + (*-6)$$

Pivotelement am weitesten rechts.

$$(*\tfrac{1}{2}) \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 0 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Schritt 5

Skaliere jede Nichtnullzeile, sodaß das dazugehörige Pivotelement (führender Eintrag) 1 wird. Erzeuge Nullen über jedem Pivotelement durch Ersetzungsoperationen.

$$\begin{matrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{matrix} \quad + (*9)$$

$$(*\tfrac{1}{3}) \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 9 & 0 & -72 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}$$

$x_5 = 4$

wähle $x_4 = 0$

$x_3 = 0$

$x_2 = -7$

$x_1 = -24$

$$\begin{pmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Schritt 5

Skaliere jede Nichtnullzeile, sodaß das dazugehörige Pivotelement (führender Eintrag) 1 wird. Erzeuge Nullen über jedem Pivotelement durch Ersetzungsoperationen.

Äquivalentes GLS in reduzierter Zeilenstufenform. →

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \end{array}$$

← unterste Stufe

$x_5 = 4$ in jeder Lsg.

x_3, x_4 frei wählbar.

$x_2 = -7 + 2x_3 - 2x_4$

$x_1 + 0 \cdot x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -24$

$x_1 = -24 + 2x_3 - 3 \cdot x_4$

Basis- und freie Variablen

Definition

Sei ein GLS in reduzierter Zeilenstufenform. Die Variablen, die zu Pivotspalten gehören heißen *Basisvariablen*. Alle anderen Variablen sind freie Variablen.

Menge der Lösungen ist:

$$\{ (1+5\cdot x_3, 4-x_3, x_3) : \text{wobei } x_3 \in \mathbb{R} \text{ beliebig} \}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x_2 + x_3 = 4$

$x_2 = 4 - x_3$

$x_1 - 5\cdot x_3 = 1$

$x_1 = 1 + 5\cdot x_3.$

$x_1 \rightarrow$ Basisvariablen.

$x_2 \rightarrow$

x_3 (frei)

Beispiel

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 6 & 2 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Frei: x_2 und x_4

Basis: x_1 und x_3 und x_5

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 6 & 2 & -5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right] \quad + \ (\cdot(-1))$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & 2 & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc:c} 1 & 6 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \end{array}$$

$x_5 = 7$

$x_3 = 5 + 4x_4$

$$\boxed{x_1 = -6x_2 - 3x_4}$$

Wenn die 0 oben eine 2 wäre.

$$\boxed{x_1 = -6 \cdot x_2 - 2(5 + 4x_4) - 3x_4}$$

Lösbarkeit

Satz

Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn die (reduzierte) Zeilenstufenform keine Zeile der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & d \end{pmatrix}$$

$\leftrightarrow$ entspricht der Gleichung

$0 \cdot x_1 + \dots + 0 \cdot x_n = d \quad (d \neq 0)$

nicht lösbar.

enthält, wobei $d \neq 0$.

Ein lösbares lineares GLS hat genau dann eine einzige Lösung wenn jede Variable eine Basisvariable ist.

Nicht lösbares GLS $\rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

nur Basisvariablen.

Lösbarkeit

$$\begin{matrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \quad + \; (\cdot\, -1)$$

Satz

Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn die reduzierte Zeilenstufenform keine Zeile der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

enthält, wobei $a \neq 0$.

Ein lösbares lineares GLS hat genau dann eine einzige Lösung wenn jede Variable eine Basisvariable ist.

Lösbarkeit

Satz

Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn die reduzierte Zeilenstufenform keine Zeile der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

enthält, wobei $a \neq 0$.
Ein lösbares lineares GLS hat genau dann eine einzige Lösung wenn jede Variable eine Basisvariable ist.

Lösbarkeit

Satz

Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn die reduzierte Zeilenstufenform keine Zeile der Form

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}$$

enthält, wobei $a \neq 0$.

Ein lösbares lineares GLS hat genau dann eine einzige Lösung wenn jede Variable eine Basisvariable ist.