Textbuch: David C. Lay, Linear Algebra and its applications

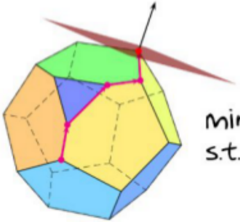
Textbuch: David C. Lay, Linear Algebra and its applications

Meph: Fünf Stunden habt Ihr jeden Tag;
Seid drinnen mit dem Glockenschlag!
Habt Euch vorher wohl präpariert,
Paragraphos wohl einstudiert,
Damit Ihr nachher besser seht,
Dass er nichts sagt, als was im Buche steht; !!
Doch Euch des Schreibens ja befleisst,
Als diktiert, Euch der Heilig Geist!

Goethe: Faust I

Wiederholung

- Lineare Gleichungen
- Systeme linearer Gleichungen



$$\min c^T x$$
$$\text{s.t. } A x \leq B$$

Lineare Gleichung in einer Variable

Beispiel

Eine Mühle mahlt in einer Stunde 5 T Mehl. Wieviele Stunden muss die Mühle betrieben werden, um 18 T Mehl zu mahlen?

5T 1 h.

VARIABLE

$$5 \cdot x = 18$$

$$x = \frac{18}{5} = 3h\ 36min.$$

Lineare Gleichung mit einer Variable:

$$(*) \quad a \cdot x = b$$

VAR

gegebene Konstanten.

Frage: Ist (*) lösbar?

1. Fall: $a \neq 0$, $x^* = \frac{b}{a}$ ist eindeutige Lösung von (*)

2. Fall: $a = 0$

1. Unterfall: $b \neq 0$

(*) nicht lösbar

2. Unterfall: $b = 0$

dann ist jedes $x^* \in \mathbb{R}$ Lösung

Beispiel

Ein Müller besitzt zwei Mühlen. Die Mühle A produziert in einer Stunde 5 T Mehl und 2 T Kleie. Die Mühle B produziert in einer Stunde 4 T Mehl und 2 T Kleie.
Gibt es Betriebszeiten t_A und t_B jeweils für die Mühlen A und B, sodass beide gemeinsam genau 7 T Mehl und 3 T Kleie produzieren?

Beispiel

Ein Müller besitzt zwei Mühlen. Die Mühle A produziert in einer Stunde 5 T Mehl und 2 T Kleie. Die Mühle B produziert in einer Stunde 4 T Mehl und 2 T Kleie. Gibt es Betriebszeiten t_A und t_B jeweils für die Mühlen A und B, sodass beide gemeinsam genau 7 T Mehl und 3 T Kleie produzieren?

$$\begin{array}{ll} \text{Mehl} \rightarrow & 5 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 7 \\ \text{Kleie} \rightarrow & 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 = 3 \end{array}$$

x_1: steht für gesuchte Zeit t_A

x_2: " t_B

x_1, x_2 Variablen.

Suchen Belegung für x_1, x_2, die beide Gleichungen erfüllt

$$\begin{aligned} 5\cdot x_1 + 4\cdot x_2 &= 7 \\ 2\cdot x_1 + 2\cdot x_2 &= 3 \end{aligned}$$

vertauschen

$$\begin{aligned} 2\cdot x_1 + 2\cdot x_2 &= 3 \quad (* 1/2) \\ 5\cdot x_1 + 4\cdot x_2 &= 7 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3/2 \quad *(-5) \\ 5\cdot x_1 + 4\cdot x_2 &= 7 \end{aligned} \quad +$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 3/2 \\ 0 - x_2 &= -1/2 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$x_2 = 1/2$$

$x_2 = 1/2$:

$$x_1 + 1/2 = 3/2 \iff x_1 = 1.$$

$(1, 1/2)$ ist Lösung.

Lineare Gleichung

Definition

Eine *lineare Gleichung* in den *Variablen* $x_1, \ldots, x_n$ ist eine Gleichung, die in der Form

$$\overset{\in\mathbb{R}}{a_1} \cdot x_1 + \cdots + \overset{\in\mathbb{R}}{a_n} \cdot x_n = \overset{\in\mathbb{R}}{b},$$

geschrieben werden kann. Dabei sind $a_1, \ldots, a_n$ und b gegebene reelle Zahlen.

Beispiel: $2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_3 + 0 \cdot x_2 = 0 \quad (2 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 0)$

$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 = 5 - \sqrt{2} \cdot x_1$ umschreiben in: $(2+\sqrt{2})\, x_1 + 4 \cdot x_2 = 5$

$x_1^2 + \sin(x_2) = 0 \leftarrow$ keine lineare Gleichung

Lineares Gleichungssystem

a_{ij}

Index der Variablen

Index der Gleichung

Definition

Ein *System linearer Gleichungen* in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ ist eine endliche Menge linearer Gleichungen in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$:

m lineare Gleichungen.

$$
\begin{array}{lllll}
a_{11} \cdot x_1 + & \cdots & a_{1n} \cdot x_n & = b_1 & \rightarrow \text{erste Gleichung} \\
a_{21} \, x_1 + \cdots & & a_{2n} \, x_n & = b_2 & \rightarrow \text{zweite Gl.} \\
& \vdots & & & \\
a_{m1} \cdot x_1 + & \cdots & a_{mn} \cdot x_n & = b_m & \rightarrow \text{m-te Gleichung}
\end{array}
$$

wobei $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ und $b_i \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant m$ feste Zahlen sind.

$2x_1 + 3 \cdot x_2 + 2x_3 = 1$

$x_1 + \quad x_3 = 5$

$a_{12} = 3$ $\quad$ 2.

$a_{22} = 0$

Lösung eines GLS

Definition

Eine Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + \quad \cdots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + \quad \cdots + a_{mn} \cdot x_n &= b_m \end{aligned},$$

ist eine Liste

$$(s_1, \ldots, s_n)$$

von reellen Zahlen, die alle m Gleichungen des Systems erfüllt.

Mit anderen Worten: Für alle $i \in \{1, \ldots, m\}$ gilt:

$$a_{i1} \cdot s_1 + a_{i2} \cdot s_2 + \cdots + a_{in} \cdot s_n = b_i$$

Zentrale Fragen

- Ist ein gegebenes lineares GLS lösbar?
- Wie findet man gegebenenfalls eine Lösung?
- Wie beschreibt man alle Lösungen?

Matrix Notation, Koeffizientenmatrix, erweiterte Matrix

$$\begin{array}{rcrcrcr}
1\cdot x_1 & - & 2\cdot x_2 & + & 1\cdot x_3 & = & 0 \\
0\cdot x_1 & + & 2\cdot x_2 & - & 8\cdot x_3 & = & 8 \\
-4\cdot x_1 & + & 5\cdot x_2 & + & 9\cdot x_3 & = & -9
\end{array}$$

Koeffizientenmatrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

Erweiterte Koef.-Mat.

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

Beispiel

(s_1, s_2, s_3) Lösung

erw. Koef. M.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2\cdot x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2\cdot x_2 & - & 8\cdot x_3 & = & 8 \\ -4\cdot x_1 & + & 5\cdot x_2 & + & 9\cdot x_3 & = & -9 \end{array} \quad \begin{array}{l} (*4) \\ + \\ (1) \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

neue erweiterte Koef. Mat.

$\Rightarrow (s_1, s_2, s_3)$ auch Lösung von: (2)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix} \quad (-4)$$

Durch die Umkehroperation erhält man das Originalsystem.

Die Lösungen von (1) und (2) sind identisch!!!

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & - & 2 \cdot x_2 & + & x_3 & = & 0 \\
 & & 2 \cdot x_2 & - & 8 \cdot x_3 & = & 8 \\
 & - & 3 \cdot x_2 & + & 13 \cdot x_3 & = & -9
\end{array}
$$

$(* \, 1/2)$

$$
\begin{bmatrix}
1 & -2 & 1 & 0 \\
0 & 1 & -4 & 4 \\
0 & -3 & 13 & -9
\end{bmatrix}
$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 2 \cdot x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & - & 4 \cdot x_3 & = & 4 \\ & - & 3 \cdot x_2 & + & 13 \cdot x_3 & = & -9 \end{array} \quad (*3)\ +$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad + \ (*4)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \quad + \ (*2) \quad + \ (*-1)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$x_1 = 29$

$x_2 = 16$

$x_3 = 3$

Lösung: $s_1 = 29,\ s_2 = 16,\ s_3 = 3$

Elementare Zeilenoperationen

$(\cdot\alpha)$
+

1. (Ersetzen) Ersetze eine Gleichung (Zeile) durch die Summe von sich selbst und dem Vielfachen *einer anderen* Gleichung (Zeile)

vertauschen.

2. (Vertauschen) Vertausche zwei Gleichungen (Zeilen)
3. (Skalieren) Multipliziere alle Koeffizienten einer Gleichung (Zeile) mit einer reellen Zahl $\neq 0$ (sprich: ungleich Null)

$(\cdot\alpha)$ $\alpha \neq 0$

Elementare Zeilenoperationen: Theoretische Überlegungen

Satz

Nehmen wir an, das lineare Gleichungssystem entstand

$$\begin{array}{ccc} a'_{11} \cdot x_1 + & \cdots & a'_{1n} \cdot x_n & = b'_1 \\ & \vdots & & \\ a'_{m1} \cdot x_1 + & \cdots & a'_{mn} \cdot x_n & = b'_m \end{array} \tag{1}$$

durch eine endliche Folge elementarer Zeilenoperationen aus dem GLS

$$\begin{array}{ccc} a_{11} \cdot x_1 + & \cdots & a_{1n} \cdot x_n & = b_1 \\ & \vdots & & \\ a_{m1} \cdot x_1 + & \cdots & a_{mn} \cdot x_n & = b_m \end{array} . \tag{2}$$

Dann gilt das folgende: Eine Liste $(s_1, \ldots, s_n)$ reeller Zahlen ist eine Lösung von (1) dann und nur dann, wenn $(s_1, \ldots, s_n)$ eine Lösung von (2) ist.

Beweis: Hat zwei Teile:

1. Teil: Wir zeigen $(s_1, \dots, s_n)$ Lösung von (2) folgt $(s_1, \dots, s_n)$ Lösung GLS (1)

2. Teil: " " (1) " (2)

Zu Teil 1:

$$\underset{\Uparrow \atop (1)}{GLS_1} \xrightarrow{\text{element. Zeilenop.}} GLS_2 \xrightarrow{\text{elem. Zeilenop.}} \cdots\cdots \longrightarrow \underset{\Uparrow \atop (2)}{GLS_k}$$

Es reicht zu zeigen: $(s_1, \dots, s_n)$ Lsg. von GLS_1, dann ist $(s_1, \dots, s_n)$ Lsg. von GLS_2. Mit anderen Worten:

Ist $(s_1, \dots, s_n)$ Lsg. eines GLS_1 und geht GLS_2 aus GLS_1 durch eine element. Zeilenop. hervor, dann ist $(s_1, \dots, s_n)$ auch Lösung von GLS_2

Dazu betrachten wir drei Fälle:

1. Fall: Elem. Zeilenop. war Vertauschung von Zeilen.

Dann gilt $(s_1, \dots, s_n)$ Lsg. von GLS_2 offensichtlich.

2. Fall: Elementare Zeilenop. ist Skalierung der Zeile i mit einer Zahl $\alpha \neq 0$. Die Zeilen von GLS_2 sind mit denen von GLS_1 identisch bis auf der i-ten Zeile.

$(\alpha \cdot a_{i1}) \cdot x_1 + \dots + (\alpha \cdot a_{in}) x_n = \alpha \cdot b_i$. Es gilt aber

$a_{i1} s_1 + \dots + a_{in} s_n = b_i \Rightarrow (\alpha \cdot a_{i1}) s_1 + \dots + (\alpha \cdot a_{in}) s_n = \alpha \cdot b_i$

Also ist $(s_1, \dots, s_n)$ auch Lsg von GLS_2

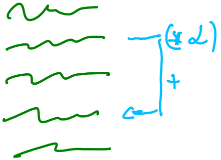
<u>3 Fall:</u> Die elem. Zeilenop. ist Ersetzung.

die i-te Zeile wird die Summe der i-ten Zeile + $\alpha *$ j-ten Zeile

$i \neq j$.

j-te Zeile →

i-te Zeile →



Die Zeilen von GLS_2 sind identisch mit den Zeilen von GLS_1 bis (evtl.) der i-ten Zeile.

i-te Zeile GLS_1:

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$$

j-te Zeile GLS_2:

$$(\alpha \cdot a_{j1} + a_{i1}) \cdot x_1 + \dots + (\alpha \cdot a_{jn} + a_{in}) x_n = (\alpha \cdot b_j + b_i)$$

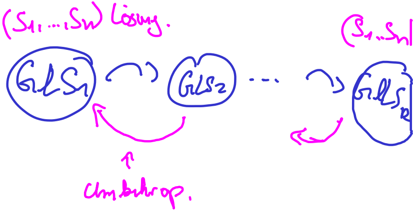
Da $(s_1,\dots,s_n)$ Lsg. von GLS$_1$ gilt:

$$\left.\begin{array}{l} a_{i1}s_1+\dots+a_{in}s_n=b_i \\ \text{und} \\ a_{j1}s_1+\dots+a_{jn}s_n=b_j \end{array}\right\} \overset{\text{(daraus folgt)}}{\Longrightarrow} (\lambda\cdot a_{j1}+a_{i1})s_1+\dots+(\lambda\cdot a_{jn}+a_{in})s_n=\lambda\cdot b_j+b_i$$

$\Rightarrow (s_1,\dots,s_n)$ Lösung von GLS$_2$.

<u>Zu Teil 2:</u> Teil 2 folgt aus Teil 1.

Denn eine elementare Zeilenoperation ist umkehrbar.



∎

Demnächst

elementare Zeilenop.