Heute (08.10.2013):

- Textbuch Kapitel 2.2, 2.3
- Erinnerung: Matrixmultiplikation und Hintereinanderausführung
- Die Umkehrabbildung
- Die Inverse einer Matrix
- Eine Formel für 2×2-Matrizen
- Ein Algorithmus zum Berechnen der Inversen
- Charakterisierung invertierbarer Matrizen
- Elementare Matrizen

Komposition von Funktionen/Abbildungen

Hintereinanderausführung
Verkettung.

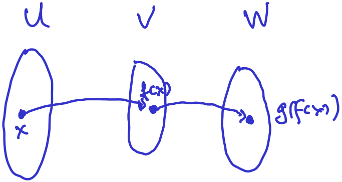
- U, V, W Mengen
- $f : U \to V$
- $g : V \to W$

dann zuerst

- Die Funktion $\underline{g \circ f} : U \to W$ mit der Vorschrift

$$(g \circ f)(u) = g(f(u))$$

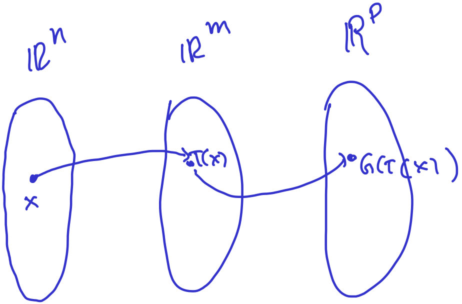
heißt *Komposition* oder *Verkettung* von f und g



Verkettung linearer Abbildungen

Satz 17

Seien $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ lineare Abbildungen. Die Verkettung $G \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ist eine lineare Abbildung.



i) $\forall\, u, v \in \mathbb{R}^n$:

$$(G \circ T)(u+v) = (G \circ T)(u) + (G \circ T)(v)$$

ii) $\forall\, u \in \mathbb{R}^n, \ \forall\, \beta \in \mathbb{R}$

$$(G \circ T)(\beta \cdot u) = \beta \cdot (G \circ T) \cdot (u)$$

Die Standardmatrix von $G \circ T$

<u>Standardmatrix:</u> Deren Spalten, sind die Bilder von $e_1, \dots, e_n$

- $\underline{B = (b_1 \cdots b_n) \in \mathbb{R}^{m \times n}}$ Standardmatrix von $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\left((G \circ T)(e_1), \dots, (G \circ T)(e_n)\right)$
- $\underline{A \in \mathbb{R}^{p \times m}}$ Standardmatrix von $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$.
- Standardmatrix von $G \circ T$ $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ ist

$$(Ab_1 \cdots Ab_n) \in \mathbb{R}^{p \times n}$$

$$(G \circ T)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A \cdot (B \cdot e_1)$$

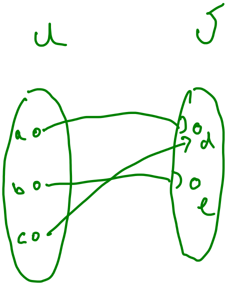
e_1

$$= A \cdot b_1$$

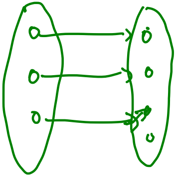
$\leftarrow$ erste Spalte der Standardmatrix von $(G \circ T)$

Umkehrfunktion

- U, V zwei Mengen und $f : U \to V$ eine Funktion.
- Wir suchen eine Funktion, $f^{-1}: V \to U$ die das Anwenden von f rückgängig macht.
- Woran kann dieses Rückgängigmachen scheitern? Wenn f nicht bijektiv.

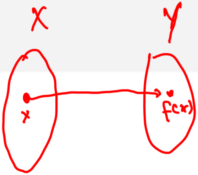


nicht injektiv



nicht surjektiv.

Umkehrfunktion



Definition

Ist $f : X \to Y$ bijektiv, so heißt

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & Y & \longrightarrow & X \\ & f(x) & \longmapsto & x \end{array}$$

die *Umkehrfunktion* von f.

Mit anderen Worten $f^{-1}(a) = b \overset{\text{def}}{\iff} a = f(b)$

Umkehrabbildungen linearer Abbildungen

Lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bijektiv $\iff m = n$ und Spalten der Standardmatrix Basis des $\mathbb{R}^n$

Satz 18

Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine bijektive lineare Abbildung, dann ist die Umkehrabbildung $T^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auch eine lineare Abbildung.

Beweis: i) $\forall\, T(x), T(y) \in \mathbb{R}^n$ soll gelten:

$$T^{-1}(T(x) + T(y)) = \boxed{T^{-1}(T(x)) + T^{-1}(T(y))}$$

$$T^{-1}(T(x) + T(y)) = T^{-1}(T(x+y))$$

$$= x + y = T^{-1}(T(x)) + T^{-1}(T(y))$$

verifiziert.

Umkehrabbildungen linearer Abbildungen

Lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bijektiv $\iff m = n$ und Spalten der Standardmatrix Basis des $\mathbb{R}^n$

Satz 18

Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine bijektive lineare Abbildung, dann ist die Umkehrabbildung $T^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ auch eine lineare Abbildung.

ii) $\forall\, T(x) \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$ soll gelten: $T^{-1}(\alpha \cdot T(x)) = \alpha \cdot T^{-1}(T(x))$ ✓

$T^{-1}(\alpha \cdot T(x)) = T^{-1}(T(\alpha \cdot x)) = \alpha \cdot x$

$= \alpha \cdot T^{-1}(T(x))$

verifiziert.

∎

Die Standardmatrix von T^{-1}

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Standardmatrix der bijektiven linearen Abbildung T.
- Standardmatrix von T^{-1}: A^{-1} ← bezeichnen wir mit A^{-1}
- $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n$ $= \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$
- $A^{-1} = (a_1^{-1} \cdots a_n^{-1})$
- Wie berechnet man a_1^{-1}?

Erste Spalte von A^{-1}:

a_1^{-1} ist (eindeutige) Lösung von

$$A \cdot a_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Standardmatrix von T^{-1}

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Standardmatrix der bijektiven linearen Abbildung T.
- Standardmatrix von T^{-1}: A^{-1}
- $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n$
- $A^{-1} = (a_1^{-1} \cdots a_n^{-1})$
- Wie berechnet man a_1^{-1}?

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1}$?

Erste Spalte: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Erweiterte Koeff matrix:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right) \text{(I)}\cdot(-2) + \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \boxed{-2} \\ 0 & 1 & \boxed{1} \end{array}\right)$$

erste Spalte! von A^{-1}

Zweite Spalte: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \text{(I)}\cdot(-2) +$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Zweite Spalte von A^{-1}

Beispiel

MIDTERM 19. Nov. in Übungsstunde.

50 min.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

$$\left[\begin{array}{c|ccc} A & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array}\right] \to$$

A in red. Zeilenstufenform

entweder $\to \left[\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right]$

oder $\to \left[\begin{array}{c} \\ 0 \cdots 0 \end{array}\right]$

insbes. A ist nicht invertierbar!

Algorithmus zum Berechnen der Inversen

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- Berechne die reduzierte Zeilenstufenform von

$$(A \ I_n)$$

- Ist das Ergebnis von der Form

$$(I_n \ B)\,,$$

dann ist $A^{-1} = B$. Andernfalls ist A nicht invertierbar.

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -9/2 & 7 & -3/2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 3/2 & -2 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

Zu Hause nachrechnen.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c} \cdot(-4) \\ + \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ (\cdot 3) \\ + \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \end{array}\right] \cdot (1/2)$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right] (\cdot -2) + \quad (\cdot -3)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -9/2 & 7 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & -2 & 1/2 \end{array}\right]$$

Charakterisierung invertierbarer Matrizen

Satz 19

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent.

a) *A ist invertierbar.*

reduzierte

b) *Die Zeilenstufenform von A ist I_n.*

c) *A hat n Pivotpositionen.*

d) *$Ax = 0$ hat nur die triviale Lösung $x = 0$.*

e) *Die Spalten von A sind linear unabhängig.*

f) *Die lineare Abbildung $T(x) = Ax$ ist injektiv.*

g) *Die Gleichung $Ax = b$ ist für alle $b \in \mathbb{R}^n$ lösbar.*

h) *Die Spalten von A erzeugen $\mathbb{R}^n$.*

i) *Die lineare Abbildung $T(x) = Ax$ ist surjektiv.*

j) *Es existiert eine Matrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $C \cdot A = I_n$.*

k) *Es existiert eine Matrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A \cdot D = I_n$.*

l) *A^T ist invertierbar.*

Benutze Satz 19, um zu entscheiden, ob diese Matrix invertierbar ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ -5 & -1 & 9 \end{pmatrix} \quad (\cdot -3)\ +$$

Zeilenstufenform.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\cdot 1)\ + \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3 Pivotpositionen

$\Leftrightarrow$ A ist invertierbar.

2×2 Matrizen

$\underset{\underset{\mathbb{R}}{\uparrow}}{\lambda} \cdot \underset{\underset{\mathbb{R}^{n \times n}}{\uparrow}}{A} = \begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix} \cdot A$

Satz 20

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist genau dann invertierbar, wenn $ad - cb \neq 0$.
In diesem Fall ist

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

<u>Beweis:</u> Sei $a \cdot d - c \cdot b \neq 0$. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{a \cdot d - b \cdot c} \begin{bmatrix} a \cdot d - b \cdot c & 0 \\ 0 & -b \cdot c + a \cdot d \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A^{-1}$ wie oben und A invertierbar.

Satz 20

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist genau dann invertierbar, wenn $ad - cb \neq 0$.
In diesem Fall ist

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Falls $a \cdot d - b \cdot c = 0$.

Dann ist zu zeigen, dass A nicht invertierbar ist.

1. Fall: $c \neq 0$

Es gilt, da $a \cdot d - c \cdot b = 0$

$$a \cdot \frac{d}{c} = b$$

und ausserdem

$$c \cdot \frac{d}{c} = d.$$

d.h. $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{c} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Spalten von A nicht Basis $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ A nicht inv.

2. Fall: $c = 0$

1. Unterfall $a = 0$, dann ist A von der Form $\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ und nicht invertierbar, c) Satz 19.

2. Unterfall $d = 0$, dann ist A von der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ A nicht (inv. z.B.) c) Satz 19.

Umkehrabbildung

Satz 21

Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *eine lineare Abbildung mit Standardmatrix* A. T *ist umkehrbar genau dann wenn* A *invertierbar ist. In diesem Fall ist* $T^{-1}(x) = A^{-1}x$.

Noch einmal das GLS $Ax = b$

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar.
- Betrachte
$$Ax = b. \tag{7}$$
- Das GLS (7) hat Lösung $x^* = A^{-1}b$

$$A \cdot x^* = A \cdot (A^{-1} \cdot b) = (A \cdot A^{-1}) \cdot b = I_n \cdot b = b.$$

Elementare Matrizen

Erinnerung: Elementare Zeilenoperationen

i) Vertauschen zweier Zeilen

ii) Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar $\neq 0$

iii) Addition eines Vielfachen einer Zeile auf eine *andere* Zeile.

Vertauschen von Zeile i und k

Multiplikation der i-ten Zeile mit $\alpha \neq 0$

Zeile i= Zeile i + $\alpha\cdot$ Zeile k, $i \neq k$

Nacheinanderausführen von elementaren Zeilenoperationen

- Auf $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ werden Operationen $O_1, \ldots, O_k$ ausgeführt (in dieser Reihenfolge)
- Das Ergebnis ist $Erg \in \mathbb{R}^{?}$
- Seien $E_{O_1}, \ldots, E_{O_k} \in \mathbb{R}^{?}$ die elementaren Matrizen, die zu $O_1, \ldots, O_k$ gehören.

Dann ist

Beispiel

Beispiel