Heute (31.10.2013):

- Textbuch Kapitel 4
- Reelle Vektorräume

Vektorräume

Definition

Ein *Vektorraum* ist eine nichleere Menge $V \neq \emptyset$ von Objekten, gennant *Vektoren*, mit zwei Operationen, genannt *Addition* und *Multiplikation mit einem Skalar*, sodass die folgenden Axiome für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $u, v \in V$ gelten:

1. $u + v \in V$. (Abschluss bzgl. Add)
2. $u + v = v + u$
3. $(u + v) + w = u + (v + w)$.
4. Es gibt ein Element $\mathbf{0} \in V$ mit $u + \mathbf{0} = \mathbf{0} + u = u$. (Nullelement)
5. Es existiert ein $w \in V$ mit $u + w = \mathbf{0}$. Man bezeichnet w auch mit $-u$.
6. $\alpha \cdot u \in \cancel{\mathbb{R}}$. V

6. $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$

7. $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u.$

8. $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \beta) \cdot u$

9. $1 \cdot u = u$

Beispiel:

$V = \{ \sqcap \}$ ist ein Vektorraum!

$\sqcap + \sqcap = \sqcap$

$\mathbf{0} = \sqcap$

$3 \cdot \sqcap = \sqcap$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}: \alpha \cdot \sqcap = \sqcap$

6. $\alpha \cdot (u + v)$

$= \alpha \cdot (\sqcap + \sqcap)$

$= \alpha \cdot (\sqcap)$

$= \sqcap = \sqcap + \sqcap = \alpha \cdot \sqcap + \alpha \cdot \sqcap = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v \quad (\checkmark)$

Satz 41

Für alle $u \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten:

i) $0 \cdot u = \mathbf{0}$. ✓

ii) $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. ✓

iii) $-u = (-1) \cdot u$.

ii) Es gilt wegen 4)

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$$

Also:

$$\alpha \cdot \mathbf{0} = \alpha \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{0})$$

$$\overset{6}{=} \alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0} \quad \Big| + (-\alpha \cdot \mathbf{0})$$

$$\Rightarrow \alpha \cdot \mathbf{0} + (-\alpha \cdot \mathbf{0}) = \alpha \cdot \mathbf{0} + \alpha \cdot \mathbf{0} + (-\alpha \cdot \mathbf{0})$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{0} = \alpha \cdot \mathbf{0}$$

Beweis: i)

$$0 \cdot u = (0+0) \cdot u \overset{7}{=} 0 \cdot u + 0 \cdot u$$

Also gilt $0 \cdot u = 0 \cdot u + 0 \cdot u$ | auf beiden Seiten $+ (-0 \cdot u)$

$$\mathbf{0} = 0 \cdot u$$

Ein erster Satz

Satz 41

Für alle $u \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gelten:

i) $0 \cdot u = \mathbf{0}$.

ii) $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

iii) $-u = (-1) \cdot u$.

Kann es $w_1 \neq w_2 \in V$ geben

mit $u + w_1 = 0 = u + w_2$? $\quad | +(-u)$

$-u + u + w_1 = -u + u + w_2$

$\Leftrightarrow \quad 0 + w_1 = 0 + w_2 \quad \Leftrightarrow \quad w_1 = w_2$

iii)

Wegen i) gilt

$0 \cdot u = \mathbf{0}$

Also $(1-1) \cdot u = \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow \quad 1 \cdot u + \underbrace{(-1) \cdot u} = \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow \quad u + (-1) \cdot u = 0$

Also $-u = (-1) \cdot u$

Beispiel

Grad ≤ 2

$V = \{p(x) : p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ mit $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation.

$(2 + 3x + 4x^2) + (3 + 5x + 0 \cdot x^2)$

$= 5 + 8x + 4x^2$ (Addition)

$3 \cdot (2 + 3x + 4x^2)$

$= 6 + 9x + 12x^2$

(Skalarmultiplikation)

$\bar{0} = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$ (Nullpolynom)

Beispiel

Grad eines Polynoms ~~ist~~ $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + \underbrace{a_n}_{\neq 0} x^n$ ist n

Grad von 0 ist Null.

$V = \{p(x) : p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ mit $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ $a_2 \neq 0\}$ mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation.

V ist kein Vektorraum, da z.B.

$0 \notin V$

$x^2 - x^2 = 0 \notin V$ d.h. Abschluss bzgl. $+$ nicht erfüllt.

Beispiel

Für $n \geqslant 0$ sei $\mathbb{P}_n$ die Menge der Polynome vom Grad $\leqslant n$.

$\mathbb{P}_n \approx \mathbb{R}^k$ für $k = n+1$

$\longrightarrow$ später!

Unterräume

Definition

Ein *Unterraum* des Vektorraums V ist eine Teilmenge $H \subseteq V$ mit

a) $\mathbf{0} \in H$

b) Für alle $u, v \in H$ gilt $u + v \in H$. (Abschluss bzg +)

c) Für alle $u \in H$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\alpha \cdot u \in H$. (Abschl. bzgl. ·)

Beispiele

1. $\{0\}$
2. $\mathbb{R}^2$ Unterraum von $\mathbb{R}^3$?
3. $\mathbb{P}_2$ Unterraum von $\mathbb{P}_3$?
4. $\mathbb{Q}$ Unterraum von $\mathbb{R}$?

1.) $\{0\}$ ist Unterraum von V

2.) $\mathbb{R}^2 \cap \mathbb{R}^3 = \emptyset$, also gilt nicht $H \subseteq V$

3.) Ja! 4.) $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $0 \in \mathbb{Q}$, $\forall u, v \in \mathbb{Q}$ gilt $u + v \in \mathbb{Q}$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}, u \in \mathbb{Q}: \alpha \cdot u \in \mathbb{Q}$?

$\alpha = \sqrt{2}$, $u = 1$. $\Rightarrow$ Nein!

Das Erzeugnis

Sei V ein Vektorraum und $v_1, ..., v_p \in V$. Analog zu $\mathbb{R}^n$ definieren wir

- $\mathrm{Span}\{v_1, ..., v_p\} = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p \colon \alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}\}$ *(Erzeugnis von $v_1, \ldots, v_p$.)*
- $v_1, \ldots, v_p$ sind *linear unabhängig*, wenn aus $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p = 0$ folgt, dass $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Bsp. $\mathbb{P}_2$

$\{x, x^2, 2x\}$ $\{1+x, x^2, 1\}$

$\Rightarrow$ linear unabhängig.

$2(x) - 1\cdot(2x) + 0(x^2)$

$= 0$

linear abhängig

Erzeugnis ist Unterraum

Satz 42

Sei V ein Vektorraum und $v_1, \ldots, v_p \in V$. Das Erzeugnis $\mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_p\}$ ist ein Unterraum von V.

Analog zu $\mathbb{R}^n$ definieren wir:

- $\{v_1, \ldots, v_p\}$ ist *Basis* von V, falls $\{v_1, \ldots, v_p\}$ linear unabhängig und $\mathrm{Span}\{v_1, ..., v_p\} = V$.

Beispiele

i) $\mathbb{P}_2$!

ii) $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{P}_2 = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 : \ a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \}$$

$$p_1 = 1 + x, \quad p_2 = 1.$$

$$\text{Span}\{p_1, p_2\} = \{ \alpha(1+x) + \beta \cdot 1 \ : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \}$$

$$= \mathbb{P}_1$$

$$\text{Span}\{e_1, e_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Warum: $a_0 + a_1 \cdot x \in \mathbb{P}_1$

gesucht: $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\boxed{\alpha(1+x) + \beta \cdot (1)} = a_0 + a_1 x$

$$\alpha + \alpha \cdot x + \beta$$

$$= \underbrace{(\alpha + \beta)}_{a_0} \cdot 1 + \underbrace{\alpha}_{a_1} \cdot x$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

$\forall a_0, a_1$ lösbar

geordnete Menge

Satz 43

Sei $S = \{v_1, \dots, v_p\} \subseteq V$ mit $v_1 \neq \mathbf{0}$ und $p \geqslant 2$. S ist linear abhängig dann und nur dann, wenn es einen Index j gibt mit $j \geqslant 2$ und v_j ist Linearkombination der $v_1, \dots, v_{j-1}$.

Beweis: „$\Leftarrow$" Sei j ein solcher Index.

$$v_j = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_{j-1} \cdot v_{j-1} \quad (*)$$

nichttriviale LK der Null

gesucht: $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ nicht alle $= 0$ mit

$$\beta_1 v_1 + \beta_2 \cdot v_2 + \dots + \beta_p \cdot v_p = 0$$

$$(*) \Rightarrow \quad \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_{j-1} \cdot v_{j-1} + (-1) \cdot v_j + 0 \cdot v_{j+1} + \dots + 0 \cdot v_p = 0$$

Setze $\beta_1 = \alpha_1, \dots, \beta_{j-1} = \alpha_{j-1}, \beta_j = (-1), \beta_{j+1} = \beta_{j+2} = \dots = \beta_p = 0$.

Satz 43

Sei $S = \{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq V$ mit $v_1 \neq \mathbf{0}$ und $p \geqslant 2$. S ist linear abhängig dann und nur dann, wenn es einen Index j gibt mit $j \geqslant 2$ und v_j ist Linearkombination der $v_1, \ldots, v_{j-1}$.

„$\Rightarrow$" Sei $\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_p \cdot v_p = 0$ nicht alle $\alpha_i = 0$

Sei j der größte Index mit $\alpha_j \neq 0$.

$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_j \cdot v_j = 0$ und $\alpha_j \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $v_j = -\frac{\alpha_1}{\alpha_j} \cdot v_1 - \cdots - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j} \cdot v_{j-1}$

Erzeugnis linear abhängiger Vektoren

Satz 44

Sei $S = \{v_1, \ldots, v_p\} \subseteq V$ *und* $H = \mathrm{Span}\{v_1, \ldots, v_p\}$.

a) *Falls* v_k *eine Linearkombination der anderen Vektoren ist, dann gilt*

$$H = \mathrm{Span}(S \setminus \{v_k\})$$

b) *Wenn* $H \neq \{\mathbf{0}\}$, *dann hat* H *eine Basis.*

Noch einmal Basis von col(A) $= \{\alpha_1 \cdot a_1 + \cdots + \alpha_n \cdot a_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 12 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 20 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Zeilenstufenform.}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\{\text{Spalte } 1, S_2, \dots, S_5\}$

Spalte 5 ist keine LK der Spalten $1, \dots, 4$.

Ansonsten gäbe es ein $x_1, \dots, x_5 \in \mathbb{R}$ mit $x_5 = 1$ und $A \cdot x = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

hätte Lösung.

Im allgemeinen können wir sagen: Ist j eine Pivotspalte, dann ist Spalte j keine LK der vorhergehenden Spalten!

Noch einmal Basis von $\operatorname{col}(A)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 12 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 20 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Spalte 4 ist LK der Spalten $\{1,2,3\}$

$\{1,2,3,4,5\} \longrightarrow \{1,2,3,5\}$

$\vdots$

$\{1,3,5\}$

Noch einmal Basis von $\mathrm{col}(A)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 12 & 1 & 5 & 5 \\ 2 & 8 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 20 & 2 & 8 & 8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$